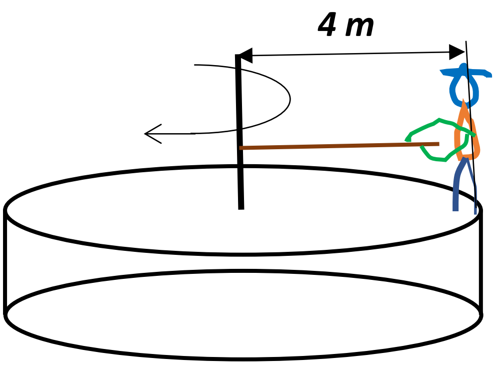
CHOQUES, EXPLOSIONES Y DEFORMACIONES EN SÓLIDOS

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

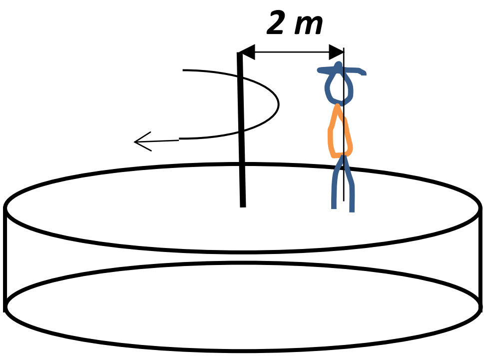
En tipo de problemas, y de forma general, aplicaremos la conservación del momento angular respecto al eje fijo si lo hay (la reacción del eje, por muy grande que sea, no tiene capacidad de variar el momento angular). Si no hay eje fijo es probable que también tengamos que aplicar la conservación del momento lineal. Empezamos con problemas en donde el sistema contiene un eje fijo de rotación.

Ejemplo 1

Un cilindro de 200 Kg de masa y radio 4 m gira con velocidad angular $\omega = 2\, {}^{Rd}/_{s}$. Sobre el cilindro, en su periferia, está apoyada una persona de masa 40 Kg y que gira solidariamente con el cilindro, tal como se indica en la figura. En un momento dado, la persona se acerca hasta una distancia de 2 m al eje agarrándose a una cuerda para ello. Calcular la velocidad angular final del sistema y la variación de su energía cinética. ¿Qué ha producido esa variación de energía cinética?



$\omega = 2\, {}^{Rd}/_{s}$



ω?

Durante la transformación sólo han actuado fuerzas verticales cuyo momento respecto del eje, también vertical, es cero. Por lo tanto, como se ha dicho, se conserva el momento angular respecto del eje.

Momento angular inicial

$$L_i = I_i \cdot \omega_i = (\frac{1}{2} m_{cil} R_{cil}^2 + m_p d_{eje}^2)\omega_i \rightarrow$$

$$L_i = \left(\frac{1}{2} 200 \cdot 4^2 + 40 \cdot 4^2\right) 2 = 4480\, Kg\, {}^{m^2}/_{s}$$

Momento angular final

$$L_f = I_f \cdot \omega_f = (\frac{1}{2} m_{cil} R_{cil}^2 + m_p d'^2_{eje})\omega_f \rightarrow$$

$$L_f = \left(\frac{1}{2} 200 \cdot 4^2 + 40 \cdot 2^2\right) \omega_f$$

Igualando ambos:

$$4480 = 1760\omega_f \rightarrow \omega_f = 2{,}54\ {}^{Rd}/_{s}$$

Energía cinética antes y después

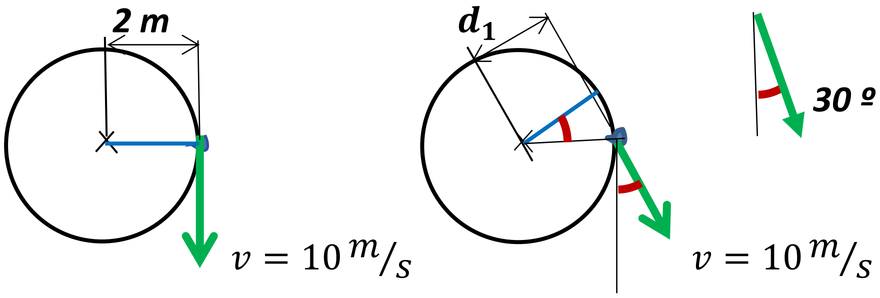
$$E_{c.i} = \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} 200 \cdot 4^2 + 40 \cdot 4^2\right) 2^2 = 4480\, J$$

$$E_{c.f} = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} 200 \cdot 4^2 + 40 \cdot 2^2\right) 2{,}54^2 = 5677{,}41\, J$$

Como vemos, la energía cinética del sistema ha crecido. La energía causante de dicho aumento sólo han podido ser las fuerzas interiores al sistema, producidas por la persona al caminar.

Ejemplo 2

Un disco de radio $R = 2\,m$ y masa $m = 60\,Kg$ descansa parado sobre un plano horizontal con un eje fijo que pasa por su centro geométrico. En su periferia hay un pequeño cuerpo de masa $m_1 = 3\,Kg$ y que descansa solidariamente sobre él. En un momento dado, por efecto de una explosión, este cuerpo sale disparado con velocidad de módulo $v = 10\ {}^{m}/_{s}$. Calcular la velocidad angular del cilindro tras el disparo en los dos casos representados en la figura. La imagen está vista desde "arriba".



En ambos casos vamos a aplicar la conservación del momento angular ya que las únicas fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema son las reacciones en el eje, cuyo momento es nulo respecto de él, y los pesos que son fuerzas verticales y paralelas al eje por lo que también su momento es nulo. Los dos ángulos marcados en rojo valen 30 º.

Figura de la izquierda:

$$L_i = 0$$

Pues todo está quieto

$$L_f = I\omega + mvd = \left(\frac{1}{2}mR^2\right)\omega + m_1 vd \rightarrow$$

$$L_f = \frac{1}{2}602^2 \cdot \omega + 3 \cdot 10 \cdot 2$$

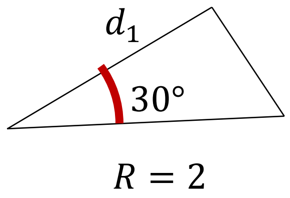
Ya que la distancia d de la línea donde se apoya $m\vec{v}$ al eje coincide en este caso con el radio del cilindro. Igualando ambas expresiones:

$$\frac{1}{2}60\cdot 2^2\cdot\omega+3\cdot 10\cdot 2=0\rightarrow\omega=\mathbf{-0,5}\ {}^{\boldsymbol{Rd}}\!/_{\boldsymbol{s}}$$

Donde el signo menos indica que su sentido de giro respecto al eje es de sentido contrario al de la masa, yendo por lo tanto el giro del cilindro en sentido contrario a las agujas de un reloj.

Figura de la derecha

El razonamiento y las expresiones son idénticas salvo que en este caso la distancia de la línea de aplicación de $m\vec{v}$ al eje no coincide con el radio;



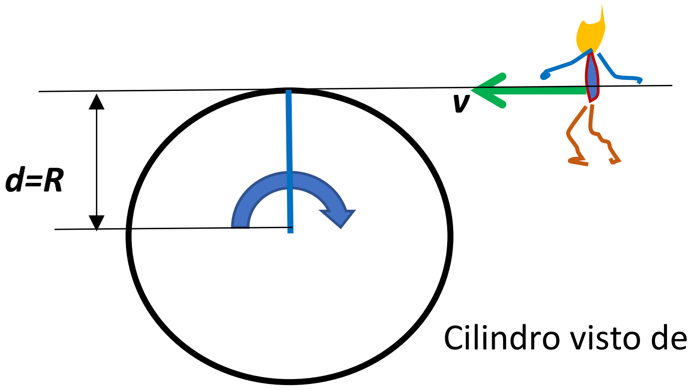
$$d_1=2\cdot cos30=\sqrt{3}$$

Y aplicando la conservación del momento angular como antes:

$$\frac{1}{2}60\cdot 2^2\cdot\omega+3\cdot 10\cdot\sqrt{3}=0\rightarrow\omega=\mathbf{-0,43}\ {}^{\boldsymbol{Rd}}\!/_{\boldsymbol{s}}$$

Ejemplo 3

Un cilindro de 100 kilogramos y radio 15 metros gira respecto a su eje axial vertical con $\omega = \pi \, {}^{Rd}/_{s}$ en el sentido de las agujas del reloj. Una niña de 30 kilogramos corre sobre una de las tangentes al cilindro con $v = 8 \, {}^{m}/_{s}$ tal como indica la figura. La niña salta sobre el cilindro y queda sobre él girando ambos solidariamente. Calcular la velocidad del conjunto después del salto:



Cilindro visto desde arriba

Aplicaremos, como en los problemas anteriores, la conservación del momento angular respecto al eje pues, como antes, la reacción en el eje no tiene momento respecto de él y las demás fuerzas exteriores son los pesos, verticales y paralelos al eje siendo también su momento nulo.

$$L_i = mvd + I\omega = -30 \cdot 8 \cdot 15 + \left(\frac{1}{2}100 \cdot 15^2\right) \cdot \pi \approx 31743$$

Fijarse que el sentido de giro de la niña respecto al eje es contrario a las agujas de reloj. **Hemos cogido como positivo el momento angular del cilindro (en el sentido de las agujas del reloj) y por ello el momento angular de la niña es negativo**.

$$L_f = I_f \omega_f = (30 \cdot 15^2 + \frac{1}{2}100 \cdot 15^2)\omega_f$$

E igualando ambos

$$31743 = 18000\omega_f \rightarrow \boldsymbol{\omega_f = 1,76 \, {}^{Rd}/_{s}}$$

Si la niña hubiera venido por la izquierda superior del cilindro su giro respecto al eje sería en el sentido de las agujas del reloj y del mismo sentido que el del cilindro. En ese caso, su momento angular inicial lo hubiéramos puesto positivo, como el del cilindro, y la velocidad angular final hubiera salido mayor que la inicial.

Ejemplo 4

Una polea de masa 30 kilogramos y radio 40 cm. gira respecto a su eje en un plano horizontal con $\omega = 30\, r.p.m.$ En un momento dado, otra polea de radio 30 cm. y masa 20 kilogramos que no gira cae sobre ella llegando en un tiempo a girar solidariamente. Calcular la velocidad angular del conjunto.

$$L_i = I_i \omega_i = \left(\frac{1}{2} 30 \cdot 0{,}4^2\right) \cdot \pi = 7{,}54$$

Donde

$$30\, r.p.m. = 30\, \frac{rev}{mn} = 30 \frac{2\pi\, Rd}{60\, s} = \pi\, {}^{Rd}\!/_{s}$$

El momento de inercia final del conjunto es la suma de los dos momentos de inercia de las dos poleas. Su momento angular será, entonces:

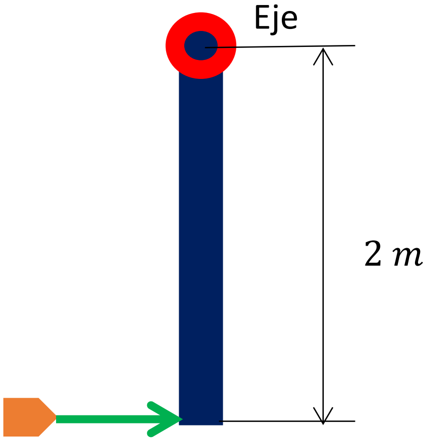
$$L_f = \left(\frac{1}{2} 30 \cdot 0{,}4^2 + \frac{1}{2} 20 \cdot 0{,}3^2\right) \omega_f = 3{,}3\omega_f$$

E igualando ambos

$$7{,}54 = 3{,}3\omega_f \rightarrow \boldsymbol{\omega_f = 2{,}28\, {}^{Rd}\!/_{s}}$$

Ejemplo 5

Una barra de 10 kilogramos de masa y 2 metros de longitud descansa vertical articulada por un eje que pasa por su extremo superior. Con velocidad $v = 15\,{}^{m}/_{s}$ y perpendicular a la barra, una masa de 500 gramos se incrusta en su extremo inferior. Calcular el ángulo que formará el conjunto con la vertical cuando se pare.



Durante el choque los pesos son verticales y pasan por el eje, por lo tanto, su momento es cero. La reacción en el eje, como ya se ha dicho, no tiene momento respecto del eje. Se conserva por lo tanto el momento angular entre justo antes del choque y justo después de él respecto al eje.

$$L_i = mvd = 0{,}5 \cdot 15 \cdot 2$$

$$L_f = I\omega = (\frac{1}{3}10 \cdot 2^2 + 0{,}5 \cdot 2^2)\omega$$

El momento de inercia del sólido formado es la suma de los momentos de inercia. La masa se considera puntual y para calcular su momento de inercia se aplica la definición $m \cdot d^2$, siendo *d* su distancia al eje.

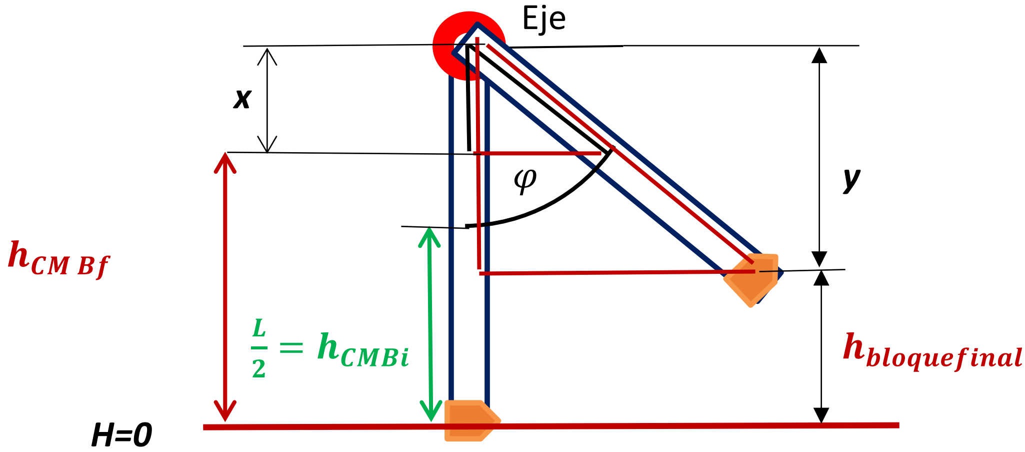
E igualando

$$15 = 15{,}33\omega \rightarrow \boldsymbol{\omega = 0,98\,{}^{Rd}/_{s}}$$

Para conocer el ángulo que describe el sistema hasta pararse aplicaremos el teorema de la energía entre el momento justo después del choque, cuando el sistema empieza a girar en posición vertical, hasta la posición en que el sistema se para. Se trata de una rotación "en caída libre".

$W_{NC} = W_{eje} = 0$

Pues la fuerza que ejerce el eje no se desplaza y no hay rozamiento en él.



Energía mecánica inicial:

Energía cinética de rotación

$$E_{cin.i} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}10 \cdot 2^2 + 0{,}5 \cdot 2^2\right) 0{,}98^2 = 7{,}36\,J$$

Energía potencial gravitatoria

Al estar el bloque en altura cero, sólo tiene energía potencial gravitatoria la barra, cuya altura corresponde a la de su centro de masas

$$E_{pot.i} = m_{barra} \cdot g \cdot h_{CM} = 10 \cdot 10 \cdot 1 = 100\,J$$

Por lo que la energía mecánica inicial es

$$E_{m.i.} = 107{,}36\,J$$

Energía mecánica final:

Sólo la energía potencial gravitatoria puesto que el sistema está parado:

$$E_{m.f.} = m_{barra} \cdot g \cdot h_{CM} + m_{bloque} \cdot g \cdot h_{bloque}$$

Si nos fijamos en la figura, en los dos triángulos rectángulos, uno en negro y otro en rojo, la altura final del centro de masas de la barra y del bloque son:

$$h_{final\ CM} = L - x = L - \frac{L}{2}cos\varphi = 2 - 1 \cdot cos\varphi$$

$$h_{final\ bloque} = L - y = L - Lcos\varphi = 2(1 - cos\varphi)$$

Llevando estas expresiones a la energía mecánica final:

$$E_{m.f.} = 10 \cdot 10 \cdot (2 - 1 \cdot cos\varphi) + 0{,}5 \cdot 10 \cdot 2(1 - cos\varphi) \rightarrow$$

$$E_{m.f.} = 210 - 110cos\varphi$$

E igualando ambas energías:

$$210 - 110cos\varphi = 107{,}36 \rightarrow cos\varphi = \frac{102{,}64}{110} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{\varphi = 21{,}1°}$$