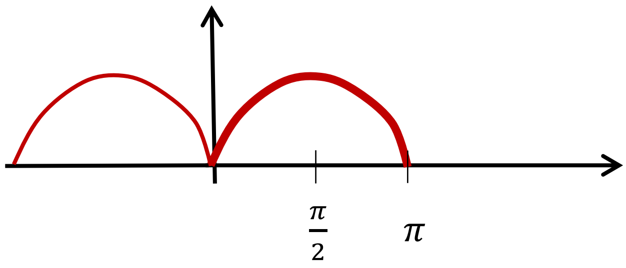
VOLÚMENES DE REVOLUCIÓN. MÉTODO DE LOS TUBOS

Hay más maneras de calcular volúmenes de revolución, pero el método de los discos, ya estudiado, es el más común. Sin embargo, vamos a hablar de otro método, **EL MÉTODO DE LOS TUBOS**, pues a veces el método de los discos NO resuelve, como vamos a ver en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1.

El área formada por la primera semionda de la función $y = senx$ y el eje X gira alrededor del eje Y. Calcular el volumen del cuerpo así engendrado.

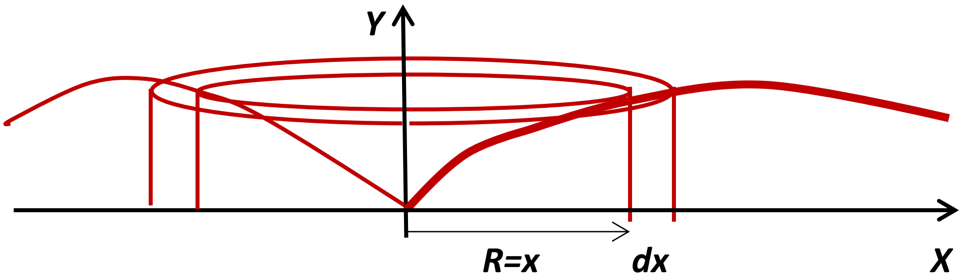


Aquí también observamos que hay dos ramas respecto al eje Y, una que es la parte de la gráfica que corresponde a $0 < x < \frac{\pi}{2}$ que es la rama interior o más cercana al eje Y y la otra que es la parte de la función que corresponde a $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ y es la rama más alejada. Y así como en el ejemplo anterior cada rama aparecía analíticamente al despejar la variable "x" para aplicar la fórmula integral, en este caso al despejar la variable "x" NO aparecen esas dos ramas distinguidas:

$$y = senx \rightarrow \boldsymbol{x = arcseny}$$

¿Qué hacemos entonces?

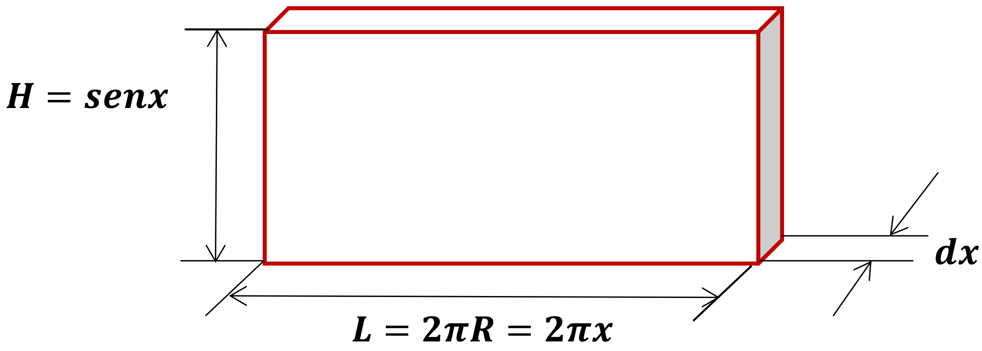
Podemos pensar que el cuerpo engendrado está compuesto de muchísimos tubitos de grosor muy fino metidos unos dentro de otros hasta completar el volumen total:



Vamos a calcular el volumen de este tubo de grosor infinitesimal dx (por eso el volumen también será un diferencial dV) y sumaremos el de él con el del siguiente que lo envuelve y el del siguiente…hasta el final ($x = \pi$)

y el del anterior a él al cuál envuelve y el anterior y…hasta el principio ($x = 0$). Darse cuenta de que el radio de un tubo genérico posicionado por la variable ***"x"*** es justamente ese valor de ***"x"*** (esto ocurrirá siempre si el eje de giro es el eje Y) y que su altura es lo que valga la función para ese valor de x, $senx$ en nuestro caso.

El volumen de este tubo, si lo desenrollamos es, por lo tanto:



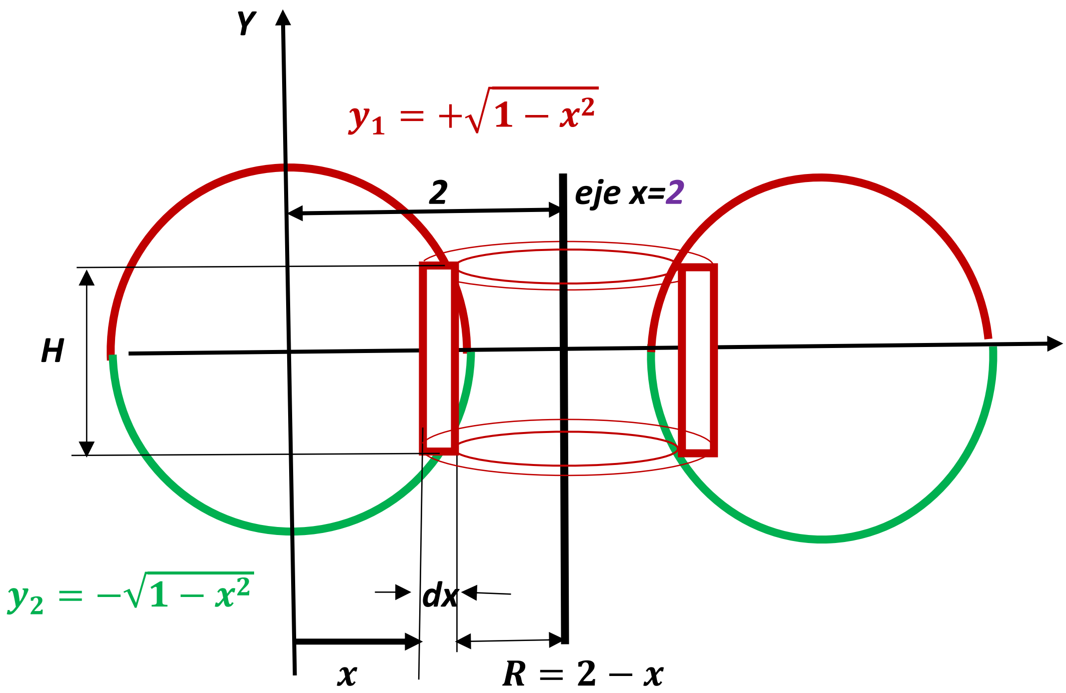
$$dV = 2\pi x senx dx \rightarrow V = \int_{x=0}^{x=\pi} 2\pi x senx dx$$

Integral por partes que no tiene ningún problema.

Por último, este método nos puede servir en el caso de que el eje de giro no sea el eje Y (o X) sino paralelo. Veámoslo en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 2

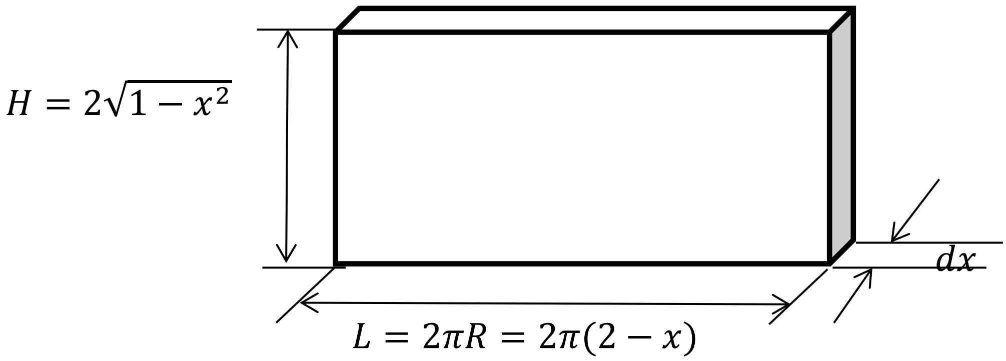
La circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ gira alrededor del eje $x = 2$. Calcular el volumen del toro así formado



En la figura, hemos situado uno de los tubos, cualquiera, mediante la variable ***"x".*** A partir de ahí se ha calculado el radio del tubo, de fácil deducción creemos en la figura como la resta de la distancia el eje ***x=2 menos la distancia "x" que define el tubo.***

Para calcular la altura, calculamos el valor de la función para ese valor de ***"x"***. Resaltamos que al despejar la función ***y*** en función de la variable ***x* nos salen dos valores, dos funciones.** Las hemos llamado y_1 e y_2, dibujadas y escritas una en rojo y otra en verde. Para una ***"x"*** determinada la función $y_1 = \sqrt{1-x^2}$ nos da esta altura positiva y la otra, y_2, la misma pero negativa. La altura del tubo será por lo tanto $H = 2\sqrt{1-x^2}$. Ya estamos en condiciones de plantear el volumen:

Si desenrollamos el tubo nos queda:



Por lo que:

$$dV = 2\pi(2-x)2\sqrt{1-x^2}dx \rightarrow$$

$$\boldsymbol{V = \int_{x=-1}^{x=1} 4\pi(2-x)2\sqrt{1-x^2}dx}$$

Integral que se separa en dos, una es de cambio de variable porque aparece una función (x^2) y su derivada en su parte esencial (x) multiplicando al diferencial de ***x*. La otra es tan típica que la volvemos a recordar aquí**:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} = \left| \begin{array}{l} \boldsymbol{x = sent} \rightarrow \begin{cases} si\ \boldsymbol{x = 1} \rightarrow 1 = sent \rightarrow \boldsymbol{t = \frac{\pi}{2}} \\ si\ \boldsymbol{x = -1} \rightarrow \boldsymbol{t = -\frac{\pi}{2}} \end{cases} \\ \qquad \boldsymbol{dx = costdt} \end{array} \right|$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-sen^2t}costdt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2tdt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+cos2t}{2}dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{sen2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \cdots$$