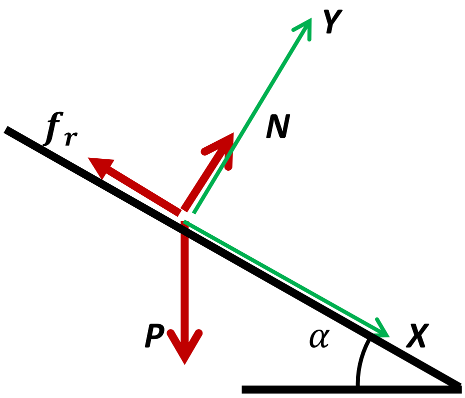
Ejemplo1

Una masa m descansa sobre una cuña inclinada α grados respecto a la horizontal. Si el coeficiente de rozamiento estático es μ_e, calcular para que ángulos el cuerpo cae deslizándose sobre la cuña

Vamos a hacer el problema suponiendo que NO DESLIZA. Evidentemente se puede hacer suponiendo que se mueve o, incluso, que no se mueve, pero está a punto de deslizar (sólo creemos que es mejor así y que se trata de la situación más sencilla).

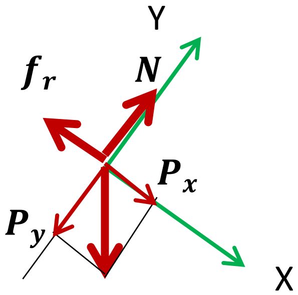
Fuerzas



Descomposición

Sobre los ejes tradicionales como si se tratara de una posible traslación, eje ***X*** el de la trayectoria y eje ***Y*** perpendicular (aplicaremos $\sum \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{exteriores}} = \mathbf{0}$, aunque esta información en el caso de que se trate de un problema de estática, como el nuestro, se cumple en cualquier sistema de ejes coordenados).

La única fuerza que hay que descomponer es el peso.



Recordamos fervientemente que**, al no haber deslizamiento, el rozamiento no toma el valor $f_r = \mu_c N$**

Para que el cuerpo esté en equilibrio:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow f_r = P_x \rightarrow \boldsymbol{f_r = mgsen\alpha}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \boldsymbol{N} = P_y = \boldsymbol{mgcos\alpha}$$

Pero como sabemos hay un valor máximo para el rozamiento.

$$\boldsymbol{f_{r\,máxima} = \mu_e N = \mu_e mgcos\alpha}$$

Por lo tanto, **para que haya equilibrio efectivamente se ha de cumplir que P_x no supere ese valor:**

$$mgsen\alpha \leq \mu_e mgcos\alpha \rightarrow$$

$$\boldsymbol{tg\alpha \leq \mu_e}$$

Si, por el contrario, el coeficiente de rozamiento estático es menor que la tangente del ángulo que forma el plano inclinado con la horizontal, P_x superará el valor máximo del rozamiento y el cuerpo deslizará. Contestación a la pregunta:

desliza si $tg\alpha > \mu_e$ $\rightarrow$

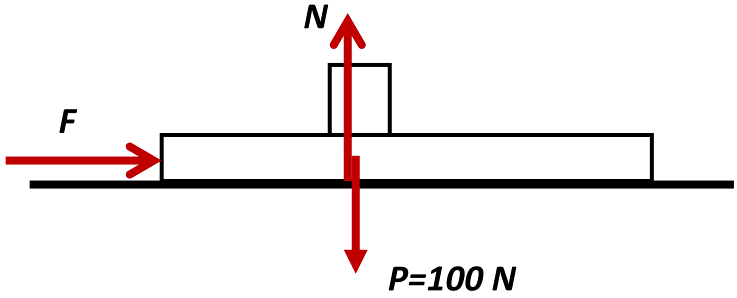
$$\boldsymbol{\alpha > arctg\mu_e}$$

Generalizando sobre los valores "a priori" desconocidos de la fuerza de rozamiento estática, normal o tensión (fuerzas que hemos llamado de ligadura –se amoldan a las "ligaduras" que el sistema tiene con el exterior- y cuyo valor depende de la situación) **las calcularemos primero aplicando las leyes a la situación (traslación, rotación, estática…) y DESPUÉS se aplica la restricción $\geq, \leq$ que evidentemente restringirá también las posibilidades de… en nuestro caso el ángulo para que deslice.**

Otro ejemplo de ello lo vemos en el siguiente problema.

Ejemplo 2

Una masa de 3 Kg descansa sobre una placa horizontal de 7 Kg, de la que se tira con una fuerza F moviéndose ambas solidariamente. Si el coeficiente de rozamiento estático entre ambas superficies es 0,25 hallar el valor de la máxima fuerza que se puede aplicar para que efectivamente ambas se muevan solidariamente. Calcular asimismo las aceleraciones de ambos cuerpos si la fuerza aplicada es el doble de la calculada en el apartado anterior y el coeficiente de rozamiento dinámico es 0,20. Entre la placa y la mesa de apoyo del sistema no hay rozamiento.

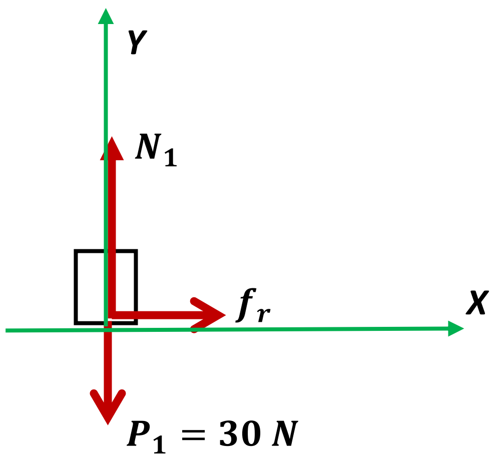


Estudiando primero el sistema formado por los dos bloques, de masa total ***10 Kg***, **en la hipótesis de que no desliza uno sobre otro**:

$$\begin{cases} F_y = 0 \to N = P \to \boldsymbol{N = 100} \\ F_x = Ma \to \boldsymbol{F = 10a} \end{cases}$$

Información que ahora mismo no nos resuelve el problema. Vamos a estudiar entonces el cuerpo de arriba

Cuerpo de arriba



Sobre el sentido de la fuerza de rozamiento podemos hacer comentarios parecidos a los hechos en el problema anterior: es de tipo estático y ni su valor y sentido están decididos “a priori”. El sentido viene dado por las condiciones del movimiento: en esta situación **sabemos que el cuerpo tiene una aceleración hacia la derecha y, como la única fuerza exterior horizontal sólo puede ser el rozamiento, deducimos que la fuerza de rozamiento va hacia la derecha.** También, visualmente, nos podemos imaginar que, si no hay rozamiento entre ambas superficies, el cuerpo de arriba resbalaría sobre el de abajo y no se movería solidariamente con él.

Como todas las fuerzas van sobre el eje ***X*** de la traslación y el eje ***Y*** perpendicular, pasamos a la aplicación de las leyes de Newton a cada eje

Aplicando las leyes:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_1 = P \rightarrow \boldsymbol{N_1 = 30\ N}$$
$$\sum F_x = ma \rightarrow f_r = ma \rightarrow \boldsymbol{f_r = 3a}$$

(Nótese claramente que $f_r \neq \mu_d N$ puesto que es rozamiento estático)

Una vez calculado su valor, que depende claramente de la aceleración y de la fuerza que la produce y sobre la que nos han preguntado, **aplicamos la restricción:**

$$\boldsymbol{f_r} \leq \boldsymbol{\mu_e N_1} \rightarrow 3a \leq 0{,}25 \cdot 30$$
$$\boldsymbol{a \leq 2{,}5\ {}^{m}/_{s^2}}$$

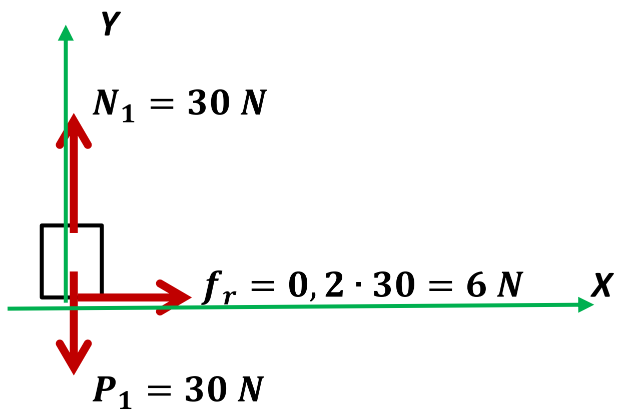
Restringida la aceleración, ésta nos limita los valores de ***F***

$$F = 10a \rightarrow a = \frac{F}{10}$$
$$a \leq 2.5 \rightarrow \frac{F}{10} \leq 2.5 \rightarrow \boldsymbol{F \leq 25\ N}$$

Si la fuerza es el doble habrá deslizamiento y ya $\boldsymbol{f_r = \mu_d N_1}$. Estudiamos cada cuerpo por separado puesto que ya no se mueven solidarios

Cuerpo de arriba:

Fuerzas

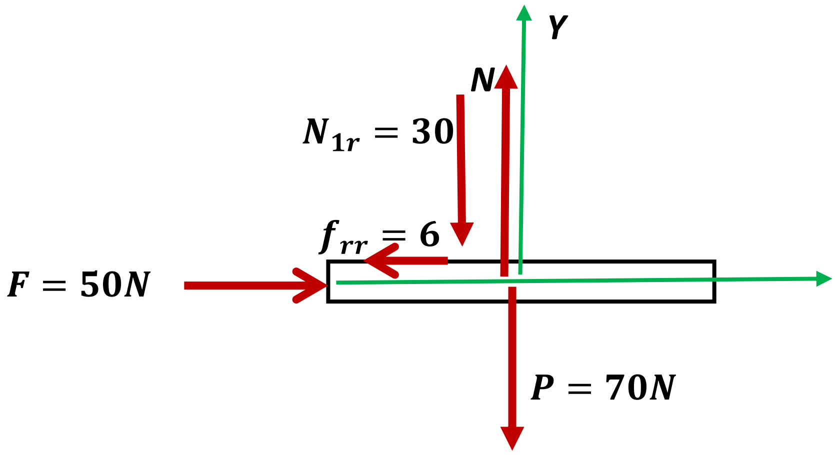


Como ya están todas descompuestas sobre los ejes

$$F_x = ma \rightarrow f_r = ma \rightarrow 6 = 3a \rightarrow \boldsymbol{a = 2\ m\ /\ s^2}$$

Cuerpo de abajo:

Fuerzas:



No olvidarse de que estamos estudiando el cuerpo de abajo, por lo que todo lo que no sea él es" el exterior", incluido el cuerpo de arriba que, como se aprecia en la figura, produce sobre el de abajo las mismas que el de abajo le ha producido a él: N_1 y f_r pero de sentido contrario, por lo que llevan una "erre" (de reacción) más en la figura.

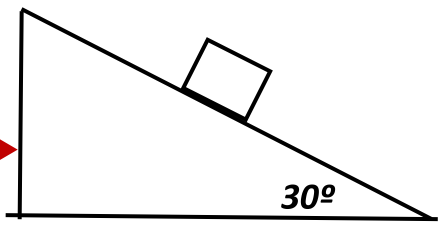
Como ya están descompuestas sobre los ejes adecuados
Aplicamos las leyes a los ejes

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \boldsymbol{N = 100\ N}$$

$$\sum F_x = ma \rightarrow 50 - 6 = 7a \rightarrow \boldsymbol{a = \frac{44}{7} m/_{s^2}}$$

Ejercicio 3

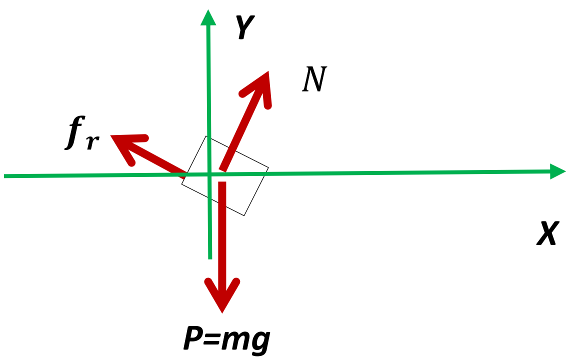
Sobre un plano inclinado 30 grados con la horizontal y de masa M descansa otra masa m. No hay rozamiento entre el plano inclinado y la superficie horizontal. Entre el plano inclinado y la masa que descansa sobre él el coeficiente de rozamiento estático es 0,3. Se aplica al plano inclinado una fuerza de módulo F tal como se indica. Calcular entre que valores puede estar el módulo de la fuerza F para que el movimiento de las dos masas (m y M) sea solidario y la masa m no suba ni baje por el plano inclinado



Estudiamos la masa **m suponiendo que NO desliza sobre M. El rozamiento es por lo tanto de tipo estático y de valor indeterminado. Como no tenemos ninguna condición dinámica que nos permita elegir el sentido (según la fuerza será en un sentido o en otro) lo dibujamos en uno de ellos arbitrariamente.**

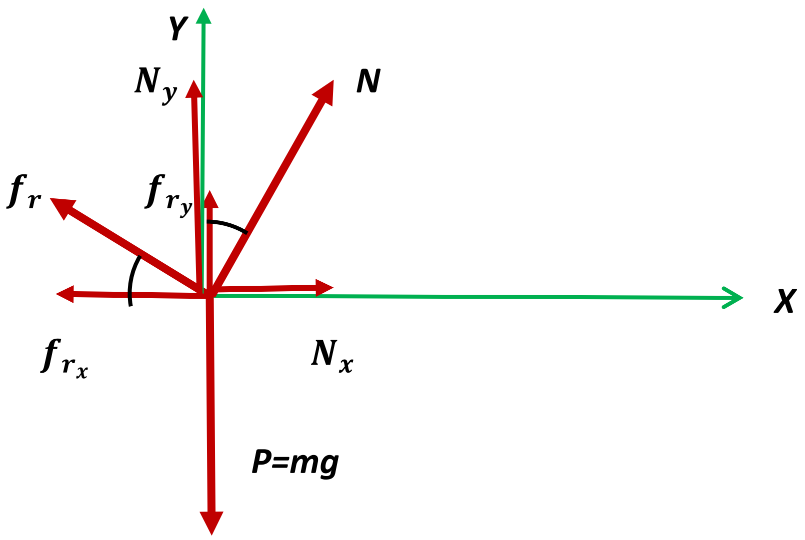
Diagrama de fuerzas:

.



La fuerza de rozamiento es, como se ha dicho, de tipo estático. Si el conjunto está parado la masa m caerá puesto que $\mu_e < tg\alpha$ $(0{,}3 < tg30 = 0{,}58)$ (**este resultado lo hemos visto en el problema *1***) y el rozamiento irá en el sentido indicado. Sin embargo, si la fuerza F aplicada a la cuña es demasiado grande la masa m tenderá a subir y el rozamiento irá en el sentido contrario al dibujado. Nosotros lo hemos dibujado en uno de los sentidos posibles (en los cálculos aparecerán las dos posibilidades) SIN TENER QUE ESTUDIAR CADA UNA DE LAS DOS POSIBILIDADES como a veces se hace en algunos libros (1ª situación: está a punto de deslizar hacia abajo. 2ª situación: está a punto de deslizar hacia arriba). Como veremos, creemos que es más fácil de resolver estudiando sólo una posibilidad y sin hacer suposiciones del tipo "está a punto de deslizar hacia…".

Descomposición según el eje X DE LA TRASLACIÓN (¡OJO! Es horizontal e Y perpendicular. Los dos ángulos marcados son iguales e igual al de la cuña, ***30º***



$$f_r \begin{cases} f_{r_y} = f_r sen30 = \dfrac{1}{2} f_r \\ f_{r_x} = f_r cos30 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} f_r \end{cases}$$

$$N\begin{cases} N_x = Nsen30 = \dfrac{1}{2}N \\ N_y = Ncos30 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}N \end{cases}$$

Aplicación de las leyes a la traslación:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_y + f_{r_y} = P \rightarrow \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}N + \frac{1}{2}f_r = mg}\ \mathbf{(1)}$$

$$\sum F_x = ma \rightarrow N_x - f_{r_x} = ma \rightarrow \boldsymbol{\frac{1}{2}N - \frac{\sqrt{3}}{2}f_r = ma}\ \mathbf{(2)}$$

Sistema de dos ecuaciones en $\boldsymbol{N\ y\ f_r}$, cuya solución es función de lo que valga la aceleración y, por lo tanto, la fuerza **F** aplicada. Lo resolvemos

$$\rightarrow \boldsymbol{N = \frac{1}{2}m(\sqrt{3}g + a)}$$
$$\rightarrow \boldsymbol{f_r = \frac{1}{2}m(g - \sqrt{3}a)}$$

Ahora aplicamos la restricción para el rozamiento estático, que como vemos en la fórmula puede ser negativo o positivo (puede ir en el sentido indicado o en el contrario según sea el valor de la aceleración) por lo que la restricción la aplicamos en valor absoluto pues en los dos sentidos su valor máximo es el mismo (si no se dice lo contrario que es lo habitual):

$$\boldsymbol{\left|\frac{1}{2}m(g - \sqrt{3}a)\right| \leq \mu_e N}$$

Por lo tanto

$$\left|\frac{1}{2}m(g - \sqrt{3}a)\right| \leq 0{,}3\frac{1}{2}m(\sqrt{3}g + a)$$

Que aplicando el significado de valor absoluto nos da finalmente:

$$\boldsymbol{-0,3\frac{1}{2}m(\sqrt{3}g + a) \leq \frac{1}{2}m(g - \sqrt{3}a) \leq 0,3\frac{1}{2}m(\sqrt{3}g + a)}$$

Dos inecuaciones que se resuelven por separado:

Izquierda:

$$-0{,}3\frac{1}{2}m(\sqrt{3}g+a)\leq\frac{1}{2}m(g-\sqrt{3}a)$$

$$-0{,}3\sqrt{3}g-0{,}3a\leq g-\sqrt{3}a$$

$$\sqrt{3}a-0{,}3a\leq g+0{,}3\sqrt{3}g$$

$$\boldsymbol{a\leq\frac{g(1+0,3\sqrt{3})}{\sqrt{3}-0,3}\cong 10,61\ {}^{m}/_{s^2}}$$

Derecha:

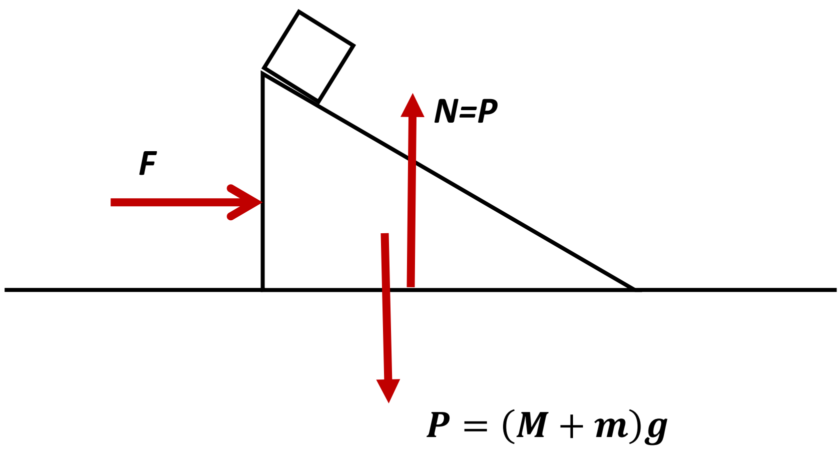
$$\boldsymbol{a\geq\frac{g\left(1-0,3\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}+0,3}\cong 2,36\ {}^{m}/_{s^2}}$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{2,36\leq a\leq 10,61}$$

La restricción en las aceleraciones nos da, evidentemente, la restricción en la fuerza **F**, si tenemos la relación entre ambas:

Estudiando el sistema mecánico **formado por las dos masas** tenemos:



Insistimos en que estamos estudiando el conjunto de las dos masas. El exterior a ellas es la superficie de apoyo que produce la normal (no hay rozamiento), la tierra, que produce el peso, y la fuerza F aplicada.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N = P = (M+m)g$$

$$\sum F_x = ma \rightarrow a = \frac{F}{M+m}$$

Y llevando esta relación a la restricción de la aceleración:

$$2{,}36 \leq a \leq 10{,}61 \rightarrow 2{,}36 \leq \frac{F}{M+m} \leq 10{,}61 \rightarrow$$

$$\boldsymbol{2,36(M+m) \leq F \leq 10,61(M+m)}$$