victor loza
ACADEMIA ONLINE

TIPOS DE MATRICES. TRASPUESTA, ADJUNTA E INVERSA

Veamos los tipos de matrices más importantes en nuestro nivel, bien por su forma o por la disposición de los elementos y, sobre todo, por su utilización en las operaciones.

a) **La matriz nula** está formada por todos los elementos iguales a cero. Es el neutro con la suma y la resta.

b) **Matriz opuesta** de una matriz ***A*** tiene todos sus elementos opuestos a los de ***A***, de tal manera que su suma da la matriz nula, neutro de la suma.

c) **Matriz traspuesta** de otra ***A*** es la que resulta de cambiar las filas por las columnas. Se denota A^t.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Y se cumple:

$$\boldsymbol{(A^t)^t = A}$$

$$\boldsymbol{(A + B)^t = A^t + B^t}$$

$$\boldsymbol{(kA)^t = k \cdot A^t}$$

d) **Matriz identidad** es el elemento neutro para el producto de matrices cuadradas del mismo orden ***nxn***.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta sería la identidad de orden ***3x3***. Cualquier matriz cuadrada de tercer orden al multiplicarla por ella queda igual.

e) **Matriz adjunta**

El adjunto del elemento a_{ij} de una matriz cuadrada es el número, o determinante si la matriz es de orden 3 o mayor, **que queda al quitar la fila *i* y la columna *j*.** A este número o determinante hay que multiplicarlo por

$$(-1)^{i+j}$$

La adjunta de una matriz es la que resulta de sustituir a sus elementos por sus adjuntos

Con dos ejemplos creemos que se entiende:

Adjunta de una matriz 2x2

Sea la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Los adjuntos son:

$$adj(a_{11}) = adj(2) = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4$$

$$adj(a_{12}) = adj(3) = (-1)^{1+2} \cdot (-1) = 1$$

$$adj(a_{21}) = adj(-1) = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3$$

$$adj(a_{22}) = adj(4) = (-1)^{2+2} \cdot 4 = 4$$

Sustituyendo cada elemento por los adjuntos calculados obtenemos la matriz adjunta de A.

$$adjA = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Los signos que marca $(-1)^{i+j}$ son $\begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$. El primero de la esquina superior izquierda es positivo y se va alternando al pasar al siguiente elemento, pero nunca se pasa en diagonal. De todas formas, tenemos la fórmula.

Adjunta de una matriz 3x3

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$adja_{11} = adj(1) = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} (-1)^{1+1} = [(-1)2 - 3 \cdot 3]1 = -11$$

$$adja_{12} = adj(4) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} (-1)^{1+2} = [2 \cdot 2 - 3 \cdot 3](-1) = 5$$

$$adja_{13} = adj(-2) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} (-1)^{1+3} = [2 \cdot 3 - (-1) \cdot 3](1) = 9$$

$$adja_{21} = adj(2) = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} (-1)^{2+1} = [4 \cdot 2 - (-2) \cdot 3](-1) = -14$$

$$adja_{22} = adj(-1) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} (-1)^{2+2} = [1 \cdot 2 - (-2) \cdot 3](1) = 8$$

$$adja_{23} = adj(3) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} (-1)^{2+3} = [1 \cdot 3 - 4 \cdot 3](-1) = 9$$

$$adja_{31} = adj(3) = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} (-1)^{3+1} = [4 \cdot 3 - (-2) \cdot (-1)](1) = 10$$

$$adja_{32} = adj(3) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} (-1)^{3+2} = [1 \cdot 3 - (-2) \cdot 2](-1) = -7$$

$$adja_{33} = adj(2) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} (-1)^{3+3} = [1 \cdot (-1) - 4 \cdot 2](1) = -9$$

La matriz adjunta de A se obtiene sustituyendo cada elemento por su adjunto

$$adjA = \begin{pmatrix} -11 & 5 & 9 \\ -14 & 8 & 9 \\ 10 & -7 & -9 \end{pmatrix}$$

Como veremos en el siguiente apartado, esta matriz es fundamental en el cálculo de la inversa.

f) **Matriz inversa de una matriz cuadrada**

El inverso del número ***3*** es el número ***1/3*** porque su producto es igual al neutro de la multiplicación de números reales, el ***1***. De la misma forma se define la inversa de una matriz cuadrada

$$A^{-1}\ es\ inversa\ de\ A\ si\ \boldsymbol{A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I}$$

Cómo se calcula es otra cosa. Vamos a dar una fórmula que tiene tres pasos para aplicarla.

La fórmula para aplicar es:

$$\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adjA)^T}$$

O lo que es lo mismo, es la traspuesta de su adjunta y multiplicada por el inverso de lo que valga el determinante de A. Si cogemos como ejemplo la matriz del ejemplo anterior:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos cada término de la fórmula (La adjunta se ha calculado en el ejemplo anterior).

$$adjA = \begin{pmatrix} -11 & 5 & 9 \\ -14 & 8 & 9 \\ 10 & -7 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow (adjA)^T = \begin{pmatrix} -11 & -14 & 10 \\ 5 & 8 & -7 \\ 9 & 9 & -9 \end{pmatrix}$$

Nos queda el cálculo del determinante de ***A*** (ver el cálculo de determinantes en la lección de determinantes)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 12 + 36 - (6 + 9 + 16) = -9$$

Por lo tanto, la matriz inversa de A es

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{1}{|A|}(adjA)^T = \boldsymbol{\frac{1}{-9}\begin{pmatrix} -11 & -14 & 10 \\ 5 & 8 & -7 \\ 9 & 9 & -9 \end{pmatrix}}$$

Se puede comprobar si está bien (después de tantos cálculos es fácil confundirse) puesto que el producto de $\boldsymbol{A}$ y su inversa ha de dar la identidad de tercer orden.

Vemos, por último, las relaciones que hay entre el valor del determinante de una matriz con el de su traspuesta, inversa y la que resulta de multiplicarla por un número

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}^{t}|$$

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A}^{-1}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{det}\,(\boldsymbol{A})}$$

$$\boldsymbol{Si}\ \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M}(\boldsymbol{nxn}) \rightarrow \mathbf{det}(\boldsymbol{kA}) = \boldsymbol{k}^{\boldsymbol{n}}\mathbf{det}\,(\boldsymbol{A})$$

Propiedades que es bueno recordar.