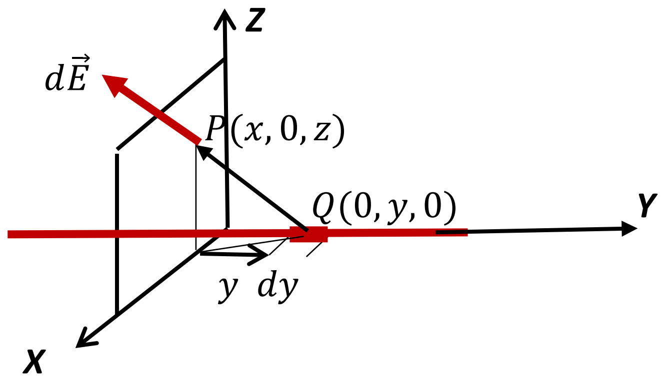
Ejemplo 3

Sea un segmento de longitud L y carga Q uniformemente distribuida (densidad de carga $\frac{Q}{L}$ constante). Calcular el campo eléctrico en los puntos del plano que pasa por su centro y es perpendicular al segmento.

Lo primero es una figura y unos ejes respecto a los cuales definir posiciones y vectores. Elegir el más sencillo es más bien intuitivo, en nuestro caso elegimos la barra cargada (remarcada en rojo) y el plano perpendicular a ella (el plano XZ) por su punto medio, según la figura:



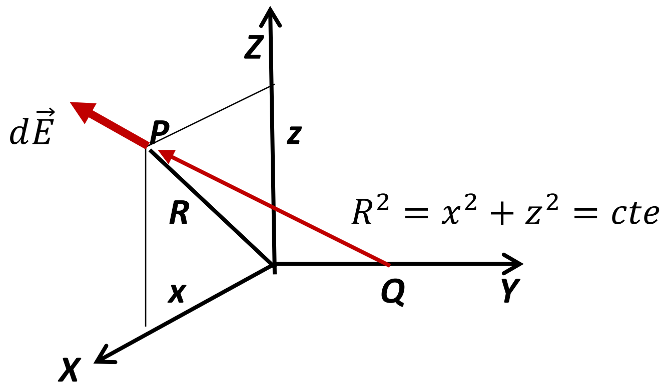
Como hemos hecho en el apartado de teoría de cálculo de campo eléctrico, cogemos una carguita genérica posicionada por, en este caso, la variable ***"y"*** y encerrada en un trocito del segmento cargado de longitud ***dy*** y calculamos el campo eléctrico producido por ella en el punto que queramos ($P(x_0, 0, z_0)$ en nuestro caso. Es un punto genérico del plano del problema, pero de componentes constantes y por ello se han puesto subíndices "cero". Eso lo tendremos muy en cuenta a la hora de integrar y sumar todos los "campitos" producidos por todas las cargas infinitesimales que conforman la barra. **Una advertencia, por comodidad de escritura no pondremos los subíndices a x_0 y z_0 y a partir de ahora serán *x* y *z*.**

Cálculo de $\boldsymbol{d\vec{E}}$:

Dirección y sentido: la dirección y sentido, como vemos en la figura, es la del vector $\overrightarrow{QP}$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{QP}} = (P-Q) = (x,0,z) - (0,y,0) = (x,-y,z) = x\vec{\imath} - y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{QP}}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$= \left|x^2+z^2 = R^2 \ x\ y\ z\ son\ constantes\ del\ punto\ P\right|$$
$$= \sqrt{R^2+y^2}$$



Vector unitario en la dirección y sentido de $\boldsymbol{d\vec{E}}$, $\boldsymbol{\vec{u}}$

$$\boldsymbol{\vec{u}} = \frac{\mathbf{1}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{QP}}\right|}\overrightarrow{\boldsymbol{QP}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{R^2+y^2}}}(\boldsymbol{x\vec{\imath} - y\vec{\jmath} + z\vec{k}})$$

Módulo del campo infinitesimal producido por la carguita $\boldsymbol{dq}$

$$\boldsymbol{dE} = K\frac{dq}{r^2} = \left|dq = \lambda dy = \frac{Q}{L}dy;\ r^2 = \left|\overrightarrow{QP}\right|^2 = R^2 + y^2\right| = \boldsymbol{K}\frac{\boldsymbol{\frac{Q}{L}dy}}{\boldsymbol{R^2+y^2}}$$

Por lo que

$$\boldsymbol{d\vec{E}} = \boldsymbol{dE}\cdot\boldsymbol{\vec{u}} = \boldsymbol{K}\frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{L}}\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{R^2+y^2}}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{R^2+y^2}}}(\boldsymbol{x\vec{\imath} - y\vec{\jmath} + z\vec{k}}) \rightarrow$$

$$\vec{E}=K\frac{Q}{L}\int_{y=-\frac{L}{2}}^{y=\frac{L}{2}}\frac{dy}{(R^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(x\vec{\imath}-y\vec{\jmath}+z\vec{k})$$

$$=K\frac{Q}{L}\left[\int_{y=-\frac{L}{2}}^{y=\frac{L}{2}}\frac{dy}{(R^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}x\vec{\imath}-\int_{y=-\frac{L}{2}}^{y=\frac{L}{2}}\frac{dy}{(R^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}y\vec{\jmath}+\int_{y=-\frac{L}{2}}^{y=\frac{L}{2}}\frac{dy}{(R^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}z\vec{k}\right]$$

La segunda integral vale cero pues es la de una función impar entre dos valores simétricos de la variable. Las otras dos resultan ser las mismas pues en ellas $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{z}$ son constantes.

La integral que hay que resolver, por lo tanto:

$$\int_{y=-\frac{L}{2}}^{y=\frac{L}{2}}\frac{dy}{(R^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\left[\frac{1}{R^2}\frac{y}{\sqrt{R^2+y^2}}\right]_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}}=\frac{1}{R^2}2\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{R^2+\frac{L^2}{4}}}=\frac{2L}{R^2\sqrt{4R^2+L^2}}$$

Llamada binomial no nos parece para nada interesante resolverla aquí (de hecho, la ha resuelto uno de los muchos programas que hay para ello). Sustituyendo en la expresión del campo, nos queda:

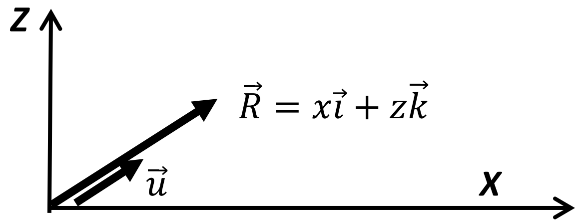
$$\vec{E}=K\frac{Q}{L}\left[\frac{2L}{R^2\sqrt{4R^2+L^2}}x\vec{\imath}+\frac{2L}{R^2\sqrt{4R^2+L^2}}z\vec{k}\right]$$

Si $\boldsymbol{R\gg L\rightarrow}$

$$\vec{E}=K\frac{Q}{L}\left[\frac{2L}{2R^3}x\vec{\imath}+\frac{2L}{2R^3}z\vec{k}\right]=K\frac{Q}{R^3}(x\vec{\imath}+z\vec{k})$$

Y el problema ya está acabado. Pero podemos sacar una conclusión a partir de la ley anterior. Veamos

Poniendo la expresión del campo en función del vector unitario $\vec{u}$ según la dirección del vector $\vec{R}$



$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\left(x\vec{\imath} + z\vec{k}\right) = \frac{1}{R}\left(x\vec{\imath} + z\vec{k}\right)$$

$$\vec{E} = K\frac{Q}{R^3}\left(x\vec{\imath} + z\vec{k}\right) = K\frac{Q}{R^2}\frac{1}{R}\left(x\vec{\imath} + z\vec{k}\right) = K\frac{Q}{R^2}\vec{u}$$

Observamos que la expresión

$$\boldsymbol{\vec{E} = K\frac{Q}{R^2}\vec{u}}$$

Nos dice que la varilla, muy lejos de ella, y en un punto del plano ***XZ,*** se comporta como una carga puntual puesta en el origen de coordenadas.