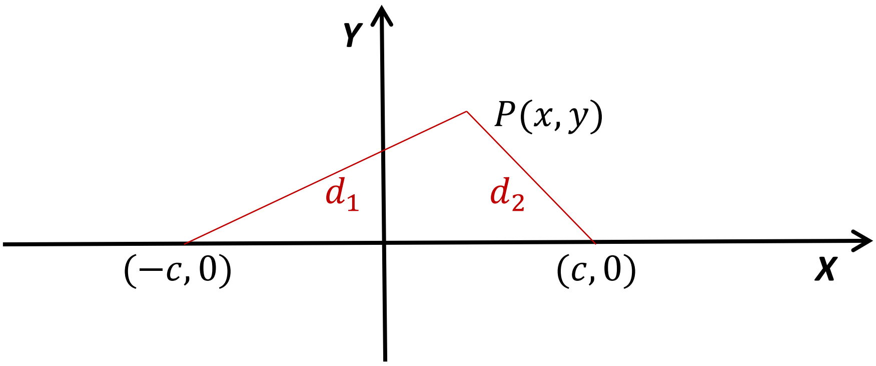
ELIPSE

La elipse se define como el **conjunto de puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.** A esta constante la denotamos por $\boldsymbol{2a}$. Veamos como ejemplo como se plantea el problema para una elipse "centrada" en los ejes y cuyos focos son los puntos

$$F_1(-c,0) \qquad F_2(c,0)$$



El punto $P(x,y)$ es un punto genérico del plano. Para que pertenezca a la elipse tiene que cumplir la condición que hemos dicho:

$$\boldsymbol{d_1 + d_2 = 2a}$$

Calculamos pues las distancias d_1 y d_2 que son las distancias a los focos:

$$d_1 = \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2}$$

$$d_2 = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

E imponiendo la condición:

$$\boldsymbol{\sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a}$$

Esta sería la primera ecuación de la elipse. Arreglando esta ecuación (cosa que aquí no nos interesa desarrollar, es mero cálculo que se puede encontrar en cualquier libro de texto) nos queda lo que llamamos la ecuación canónica de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Donde

$$a^2 = b^2 + c^2$$

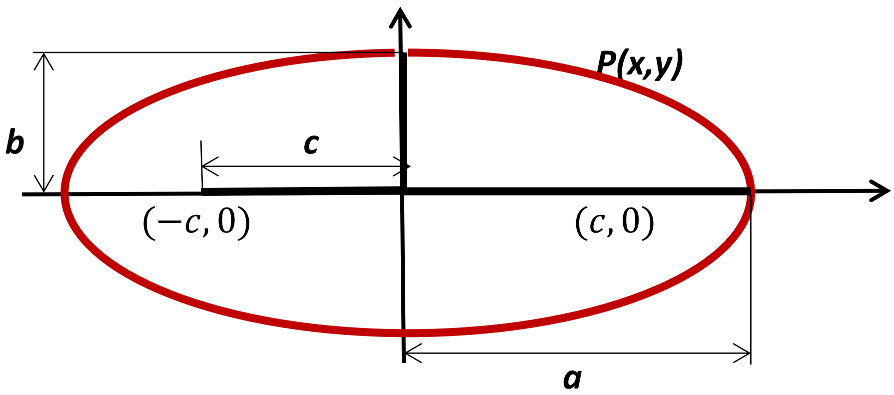
Una circunferencia es una elipse con $a = b \ y \ c = 0$

Se define la excentricidad como el cociente:

$$e = \frac{c}{a} (< 1)$$

Siendo cero en una circunferencia $(c = 0)$

La forma de esta elipse es la de la figura:



A la longitud a se le llama semieje mayor y a la longitud b semieje menor. A la longitud c se le llama semidistancia focal.

Si la elipse es "vertical" el semieje mayor a irá de denominador de la variable "y" y el semieje menor b irá en el denominador de la variable "x" siendo su ecuación

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} -= 1$$

Por lo que podemos decir que el semieje mayor al cuadrado, a^2, es siempre el denominador MAYOR de la ecuación. Si acompaña a la variable "x" es una elipse horizontal, si acompaña a la variable "y" es una elipse vertical.

La fórmula de la excentricidad y la que relaciona $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{c}$ son para todas las elipses.

Como se puede apreciar, conoceremos la ecuación de una elipse y sus características cuando conozcamos dos de los tres parámetros a, b y c (El tercero siempre por la relación que hay entre ellos $\boldsymbol{c^2} + \boldsymbol{b^2} = \boldsymbol{a^2}$) y de eso se tratará en los problemas: sabiendo la relación entre ellas y los datos del problema, calcular a, b yc.

Ejemplo

Una elipse pasa por el punto $\boldsymbol{P(-1,2)}$ y su excentricidad

$$\boldsymbol{e = \frac{1}{2}}$$

Calcular su ecuación.

Si pasa por el punto dado, sus coordenadas cumplirán la ecuación, por lo tanto:

$$\boldsymbol{\frac{(-1)^2}{a^2} + \frac{2^2}{b^2} = 1 \qquad (1)}$$

Donde hemos supuesto que es una elipse horizontal porque en el problema no se hacía referencia a ello y hemos elegido la que nos ha parecido. Ya tenemos una ecuación con las incógnitas fundamentales a y b.

Por otra parte, sabemos:

$$e = \boldsymbol{\frac{1}{2} = \frac{c}{a} \qquad (2)}$$

(No deducir, como se suele hacer, de esta *ecuación 2* el valor de $c = 1$ y el valor de $a = 2$; si el cociente de dos números es $\frac{1}{2}$ eso significa que el denominador es el doble que el numerador, condición que cumplen muchos números)

Como se ve, tenemos dos ecuaciones en los parámetros fundamentales. Pero nos falta una ecuación para tener un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. No olvidarse de la relación que hay entre $a, b \ y \ c$

$$\boldsymbol{c^2 + b^2 = a^2}$$

Que junto con las otras dos resuelven el problema.

Este es un problema típico y sencillo (aunque un poco largo a la hora de resolver las tres ecuaciones con tres incógnitas) y que ejemplifica a otros muchos. **Como en cualquier figura, hay que deducir sus características fundamentales, en el caso de la elipse los números a, b y c.**