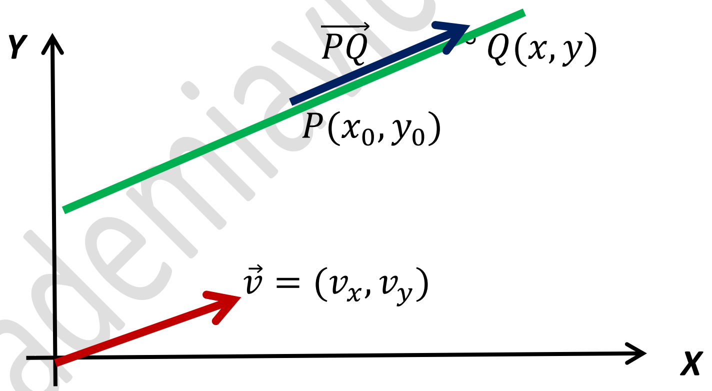
ECUACIONES DE LA RECTA

Tenemos una idea intuitiva de lo que es una línea recta pero la definición rigurosa no es tan simple. Para nuestro nivel, partiendo del hecho de que nos imaginamos claramente lo qué es, una línea recta va a quedar **definida por una dirección**, **por un vector llamado director,** y **por un punto por el que pasa. Estas son las dos características que siempre tenemos que buscar para calcular la ecuación de una recta**: **vector que indica su dirección y punto por el que pasa**.

Sea la recta de dirección la del vector $\vec{v} = (v_x, v_y)$ **y que pasa por el punto** $P(x_0, y_0)$

Fijémonos en la figura



Como vemos en ella, si **un punto Q genérico del plano de coordenadas** (x, y) pertenece a la recta que pasa por el punto P y tiene la dirección del vector $\vec{v}$ **ha de cumplir que el vector** $\overrightarrow{PQ}$ **sea paralelo al vector** $\vec{V}$. Entonces, como

$$\overrightarrow{PQ} = (x - x_0, y - y_0)$$

$$\vec{V} = (v_x, v_y)$$

Aplicando la condición de paralelismo entre ambos vectores, los puntos que la cumplan serán todos los de la recta, cuya ecuación será:

$$\boldsymbol{\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y}}$$

Ecuación fundamental que recibe el nombre de ecuación **CONTINUA** y que a nosotros nos parece la más intuitiva y fácil de recordar. De ella se deducen las siguientes, también importantes y que hay que conocer:

Ecuación paramétrica:

En la ecuación continua, para cada punto (x, y) de la recta el cociente tiene un valor determinado t:

$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = t \to \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{v_x} = t \\ \dfrac{y - y_0}{v_y} = t \end{cases}$$

De las ecuaciones que están entre llaves se deduce:

$$\boldsymbol{\begin{cases} x = x_0 + t \cdot v_x \\ y = y_0 + t \cdot v_y \end{cases}}$$

Se llaman ecuaciones paramétricas de la recta. Los distintos e infinitos valores de (x, y), puntos de la recta, se obtienen dando los infinitos valores de los números reales al parámetro "t".

Ecuación general

Si, otra vez, partimos de la ecuación continua y operamos:

$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} \to v_y(x - x_0) = v_x(y - y_0)$$

Y pasando todo a un lado:

$$\boldsymbol{v_y} \cdot x - \boldsymbol{v_x} \cdot y - \boldsymbol{v_y x_0} + \boldsymbol{v_x y_0} = 0$$

Si denotamos a los números marcados en negrita por las letras A, B y C tenemos

$$\boldsymbol{Ax + By + C = 0} \; donde \begin{cases} A = v_y \\ B = -v_x \\ C = -v_y x_0 + v_x y_0 \end{cases}$$

Ecuación que recibe el nombre de **general o implícita**

Donde el vector $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{v_y}, -\boldsymbol{v_x})$ es un vector perpendicular a la recta, ya que, como sabemos, el vector que indica la dirección de la recta es el vector $\vec{\boldsymbol{V}} = (\boldsymbol{v_x}, \boldsymbol{v_y})$. Ambos vectores tienen un producto escalar nulo, cumplen la condición de perpendicularidad.

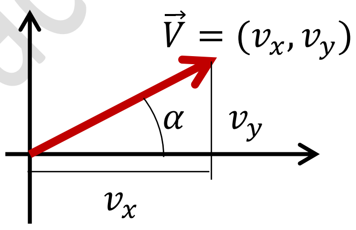
Ecuación punto-pendiente

Si partimos otra vez de la ecuación continua y la arreglamos tenemos:

$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} \rightarrow y - y_0 = \frac{v_y}{v_x}(x - x_0)$$

Como

$$\frac{\boldsymbol{v_y}}{\boldsymbol{v_x}} = \boldsymbol{tg\alpha = m = pendiente\ de\ la\ recta}$$



Nos queda, por último:

$$\boldsymbol{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

Ecuación punto-pendiente

Si en esta última ecuación despejamos "y" obtenemos la ecuación clásica o explícita:

$$\boldsymbol{y = mx + n}$$

Donde m sigue siendo la pendiente. Esta es la ecuación **explícita.**

Veamos a continuación algunos ejemplos básicos pero fundamentales para empezar a practicar y entender estas ecuaciones.

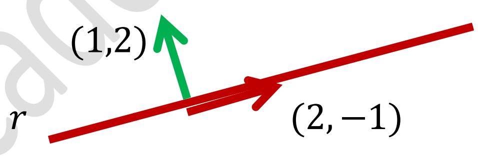
Ejemplo 1

Calcular las rectas perpendiculares y paralelas a la recta

$$\boldsymbol{r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1}}$$

Y que pasan por el punto $(2,-7)$

Lo primero que debemos hacer siempre es dibujar un esbozo de esta recta, su dirección y la perpendicular. Por teoría, sabemos que el vector $(2,-1)$ tiene la dirección de la recta, por lo tanto, un vector perpendicular será el vector $(1,2)$ (se le da la vuelta y se cambia de signo a una de sus componentes)



Por ello, la paralela tendrá de vector director el vector $(2,-1)$ y la perpendicular el vector $(1,2)$ y como pasan, según el enunciado, por el punto $(2,-7)$, sus ecuaciones serán:

Paralela

Ecuación continua

$$\begin{cases} \vec{v} = (2. -1) \\ P\ (2, -7) \end{cases} \rightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y-(-7)}{-1}$$

Ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = 2 + t \cdot 2 \\ y = -7 + t \cdot (-1) \end{cases}$$

Ecuación general

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+7}{-1} \rightarrow -x + 2 = 2y + 14 \rightarrow -x - 2y - 12 = 0 \rightarrow$$

$$x + 2y + 12 = 0$$

Ecuación explícita

De la ecuación anterior despejamos "y"

$$2y = -x - 12 \rightarrow y = -\frac{1}{2}x - 6$$

Perpendicular

Ecuación continua

$$\begin{cases} \vec{v} = (1,2) \\ P(2, -7) \end{cases} \rightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y+7}{2}$$

Ecuación paramétrica

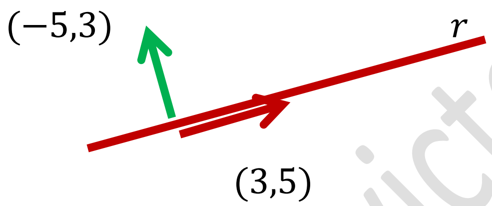
$$\begin{cases} x = 2 + t \cdot 1 \\ y = -7 + t \cdot 2 \end{cases}$$

Ejemplo 2

Paralela y perpendicular a $\boldsymbol{r \equiv -5x + 3y - 9 = 0}$

Por el punto $\mathbf{(2, -7)}$

Empezamos, como antes, haciendo un breve dibujo de la recta y sus vectores paralelo y perpendicular. **Como está en forma general los coeficientes de "x" y de "y" forman el vector** $(-5, 3)$ **perpendicular a la recta, como se ha dicho en la teoría**. Por lo tanto, uno paralelo, como también se ha dicho en la teoría, proviene de cambiar de orden a las componentes del anterior y cambiar después a una de ellas de signo. Resulta entonces, el vector $(3,5)$



Por ello, la recta paralela a ella tendrá de vector director el $\mathbf{(3, 5)}$ **y la perpendicular el vector** $\mathbf{(-5, 3)}$**.**

Paralela

$$\begin{cases} \vec{v} = (3,5) \\ P\ (2,-7) \end{cases} \rightarrow \frac{\boldsymbol{x-2}}{\mathbf{3}} = \frac{\boldsymbol{y+7}}{\mathbf{5}}$$

Perpendicular

$$\begin{cases} \vec{v} = (-5,3) \\ P\ (2,-7) \end{cases} \rightarrow \frac{\boldsymbol{x-2}}{\mathbf{-5}} = \frac{\boldsymbol{y+7}}{\mathbf{3}}$$

A partir de las ecuaciones continuas de las rectas solución podemos ya calcular, como se ha hecho en el ejercicio anterior, las demás ecuaciones.