victor loza
ACADEMIA ONLINE

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

Ya hemos visto que una función queda simbolizada en nuestro caso por una expresión del tipo

$$y = f(x)$$

Se define el dominio de una función como AQUELLOS VALORES DE LA VARIABLE "X" PARA LOS CUALES EXISTE LA FUNCIÓN.

Pero puede ocurrir que la expresión ***f(x) no tenga sentido para algunos valores de la variable "x". Tenemos tres casos fundamentales en nuestro nivel donde una expresión no tiene sentido, aunque añadimos un cuarto caso que, como se advierte, es más propio de 2º de bachiller.*** Veamos cada uno de ellos.

PRIMER CASO. APARECEN DENOMINADORES con la variable "x".

Hemos de recordar que un cociente no tiene sentido si su denominador vale cero. Por lo tanto, excluiremos del dominio a los valores de "x" que anulan el denominador.

Ejemplo 1

Calcular el dominio de la función

$$\boldsymbol{y = \frac{x}{x^2 - 1}}$$

Como hemos dicho, esta expresión no tiene sentido si se anula el denominador. Por lo tanto

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

El resultado se escribe así:

$$\boldsymbol{D: R \setminus \{\pm 1\}}$$

Cuya lectura es

Dominio de la función: todos los números reales excepto $x = \pm 1$

Ejemplo 2

Calcular el dominio de

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Resolvemos de la misma manera:

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow \boldsymbol{x = \sqrt{-1} \notin R}$$

La conclusión es que no hay ningún número real que anule el denominador y, por lo tanto, el dominio es

$$D: R$$

El dominio son todos los números reales.

SEGUNDO CASO*:* APARECEN RAICES PARES

Hemos de recordar que no existen las raíces pares de los números negativos. Por lo tanto, cuando aparezca una raíz par, lo que está dentro de ella ha de positivo o cero. Resolveremos entonces una inecuación. Para ello, recordar como se hace en las dos lecciones dedicadas a la resolución de inecuaciones**.**

Ejemplo 3

Calcular el dominio de

$$y = 1 + \sqrt{\frac{3 - x}{5 - x}}$$

Tenemos una raíz cuadrada y un denominador en los que fijarnos.

Para que no se anule el denominador

$$5 - x \neq 0 \rightarrow x \neq 5$$

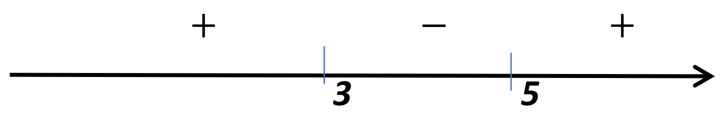
Para que exista la raíz cuadrada

$$\frac{\mathbf{3} - \boldsymbol{x}}{\mathbf{5} - \boldsymbol{x}} \geq \mathbf{0}$$

Tenemos que resolver una inecuación. Para ello, consultar "obligatoriamente" la lección dedicada a ello.

$$3 - x = 0 \rightarrow x = 3$$

$$5 - x = 0 \rightarrow x = 5$$



Antes de ***x=3*** elegimos $x = 0 \rightarrow \frac{3-0}{5-0} > 0$

Entre ***x=3 y x=5*** elegimos $x = 4 \rightarrow \frac{3-4}{5-4} < 0$

Y a partir de ***x=5*** elegimos $x = 10 \rightarrow \frac{3-10}{5-10} > 0$

Como tenemos que elegir los valores de "x" que hacen a la función positiva, estos serán:

$$x \in (\infty \quad 3] \cup (5 \quad \infty)$$

Donde hemos excluido, aparte de los infinitos, el valor $\boldsymbol{x = 5}$ porque anula el denominador y no es solución de nada. (Los corchetes incluyen al número extremo, los paréntesis excluyen al número extremo).

TERCER CASO. APARECEN LOGARITMOS

Hemos de recordar que para que exista el logaritmo de un número, ese número ha de ser ESTRICTAMENTE positivo. Por lo tanto, en estos casos también tendremos que resolver una inecuación.

Ejemplo 4

Calcular el dominio de

$$\boldsymbol{y = log\frac{x-2}{x+1}}$$

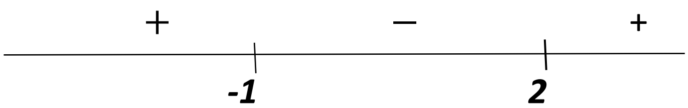
Como hemos dicho, sabemos que el logaritmo sólo existe de números estrictamente positivos, por lo tanto, el dominio de esta función será:

$$D = \left\{\forall x \in R/\frac{x-2}{x+1} > 0\right\}$$

Resolviendo esa inecuación:

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$$



Por lo que el dominio es:

$$\boldsymbol{x \in (-\infty - 1) \cup (2\ \infty)}$$

Donde se han excluido los extremos $\boldsymbol{x = -1\ y\ x = 2}$ porque ninguno de los dos cumple la inecuación (la expresión tiene que ser estrictamente positiva y ***x=2*** hace que la fracción valga cero y ***x=-1*** anula el denominador).

CUARTO CASO. APARECEN LAS FUNCIONES *arcsenf(x) o arccosf(x)*

Un último ejemplo que, como ya se ha comentado, es más propio de 2º de bachiller pero que añadimos aquí para tener el conjunto de los tipos en una única lección.

Dado que el seno o coseno de un ángulo sólo toman valores entre ***-1 y +1*** **no existe el arcsenf(x) o el arccosf(x) si f(x) no está entre esos valores. No existe el arco cuyo seno o coseno valgo 2, por ejemplo.** Por lo tanto, se ha de cumplir:

$$\boldsymbol{-1 \leq f(x) \leq 1}$$

$$\boldsymbol{-1 \leq f(x) \leq 1}$$

Ejemplo 5

Calcular el dominio de la función

$$\boldsymbol{y = arcsen(x^2 - 1)}$$

De la definición de $arcsenf(x)$ sabemos que $-1 \leq f(x) \leq 1$ pues no hay ningún ángulo cuyo seno esté fuera de esos valores. En nuestro caso

$$-1 \leq x^2 - 1 \leq 1 \rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \geq -1 \ \ (ecuación\ 1) \\ x^2 - 1 \leq 1\ (ecuación\ 2) \end{cases}$$

Resolvemos la ecuación (1)

$$\boldsymbol{x^2 - 1 \geq -1 \rightarrow x^2 \geq 0}$$

Expresión que cumplen todos los valores "x"

Ahora la ecuación 2

$$x^2 - 1 \leq 1 \rightarrow \boldsymbol{x^2 - 2 \leq 0}$$

$$x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{ccccc} + & | & - & | & + \\ & -\sqrt{2} & & \sqrt{2} & \end{array}$$

Siendo por lo tanto la solución a esta inecuación

$$\boldsymbol{x} \in \left[-\sqrt{\mathbf{2}}\ \sqrt{\mathbf{2}}\right]$$

Y como el dominio son los valores de "x" que **cumplen las dos inecuaciones a la vez la solución es la intersección de ambas soluciones**, las "x" que están a la vez en ambos intervalos. En nuestro caso

$$\boldsymbol{x} \in \left[-\sqrt{\mathbf{2}}\ \sqrt{\mathbf{2}}\right]$$

Pues la primera la cumplen todas las "x" con lo que las dos inecuaciones a la vez la cumplen las "x" del segundo intervalo (porque también cumplen la primera inecuación evidentemente).