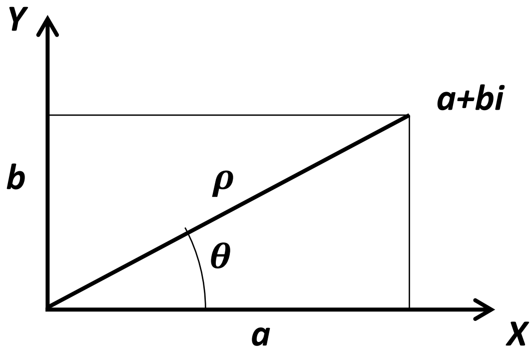
victor loza
ACADEMIA ONLINE

FORMA POLAR DE UN NÚMERO COMPLEJO

De la misma manera que en la forma binómica hay dos variables, la parte real y la parte imaginaria, en la forma polar hay otras dos variables, ρ y θ, tal como se indica en la figura.

A la hipotenusa ρ se le denomina módulo del complejo y al ángulo θ argumento del complejo (así coma a "a" se le llamaba parte real y a "b" parte imaginaria)



El punto que representa al complejo, el afijo, se puede definir también con las variables $\rho\ y\ \theta$ en vez de con las variables $a\ y\ b$.

Las relaciones entre ambas son las que se deducen de la figura, del estudio del triángulo rectángulo de hipotenusa ρ y de catetos la parte real e imaginaria del complejo.

$$\boldsymbol{\rho = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$tg\theta = \frac{b}{a} \rightarrow \boldsymbol{\theta = arctg\frac{b}{a}}$$

Podemos decir entonces:

$$\boldsymbol{a + bi = \rho_\theta}$$

Pasar de una forma a otra es fundamental. Vemos algunos ejemplos.

Ejemplo 1

Pasar a forma polar el complejo $\mathbf{1+\sqrt{3}i}$

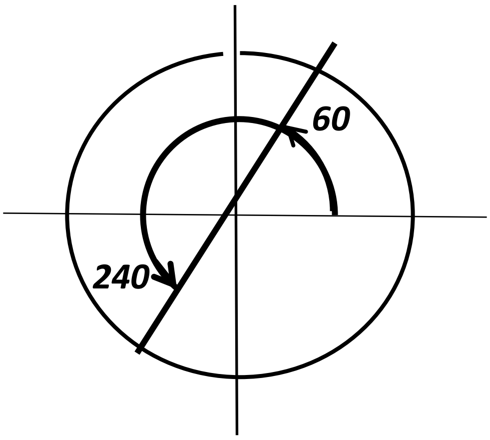
Módulo:

$$\rho = \sqrt{a^2+b^2} = \left|\begin{matrix} a = 1 \\ b = \sqrt{3} \end{matrix}\right| = \sqrt{1+3} = 2 \; (siempre\ en\ positivo)$$

Argumento:

$$tg\theta = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} \to \theta = arctg\sqrt{3} = |calculadora| = 60°$$

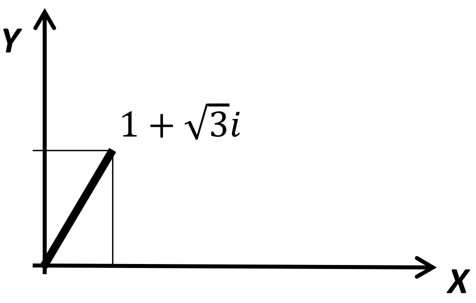
Pero CUIDADO ¡¡Hay dos ángulos cuya tangente es $\sqrt{3}$!! La calculadora nos dice un ángulo de los dos. El otro difiere 180 grados del anterior (recordar la definición de tangente).



En nuestro caso los dos ángulos cuya tangente vale $\sqrt{3}$ son

$\mathbf{60}\ \ y\ \ 60+180=\mathbf{240}$

¿Cuál de ellos es el nuestro? Se contesta fácilmente representando nuestro complejo



Y como se observa en la figura, al **estar en el primer cuadrante el ángulo solución es el de 60 grados**. Por lo tanto, nuestro complejo se escribiría en forma polar:

$$1+\sqrt{3}i = 2_{60} = 2_{\frac{\pi}{3}}$$

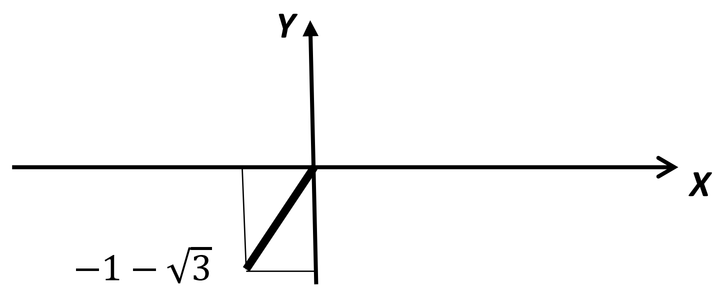
Ejemplo 2

Pasar a forma polar el complejo $-\mathbf{1}-\sqrt{\mathbf{3}}\boldsymbol{i}$

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$tg\theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \rightarrow \theta = arctg\sqrt{3} = \begin{cases} \theta = 60 \\ \theta = 240 \end{cases}$$

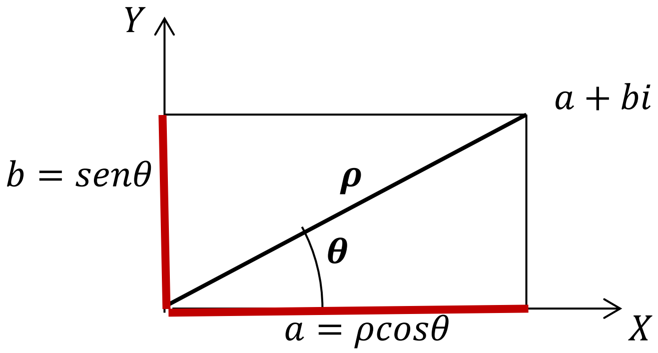
Y, como antes, para elegir el ángulo dibujamos nuestro complejo:



Y como está en **el tercer cuadrante**, el ángulo solución es **240 grados**. Entonces:

$$-1-\sqrt{3}i = 2_{240}$$

Si, al revés, tenemos un número en forma polar y lo queremos pasar a binómica:



$$\boldsymbol{\rho_\theta = \rho cos\theta + i\rho sen\theta = \rho(cos\theta + isen\theta)}$$

A **la forma $\boldsymbol{\rho(cos\theta + isen\theta)}$** que es realmente binómica si sustituimos los números, **se le llama forma trigonométrica**:

Ejemplo 3

Pasar a forma binómica el complejo $\boldsymbol{4_{120}}$

$$4_{120} = 4(cos120 + isen120) = 4(-cos60 + isen60) =$$

$$= 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + 2\sqrt{3}i$$

OPERACIONES EN FORMA POLAR

En la forma polar, las operaciones básicas tienen las siguientes fórmulas:

Suma y resta

Como hemos dicho, estas dos operaciones son las únicas que hay que hacerlas en forma binómica, no tienen ley en forma polar.

Producto

$$\boldsymbol{\rho_\alpha \cdot p'_\beta = (\rho \cdot \rho')_{\alpha+\beta}}$$

$$2_{30} \cdot 3_{60} = (2 \cdot 3)_{30+60} = 6_{90}$$

División

$$\boldsymbol{\frac{\rho_\alpha}{\rho'_\beta} = (\frac{\rho}{\rho'})_{\alpha-\beta}}$$

$$\frac{6_{45}}{2_{30}} = (\frac{6}{2})_{45-30} = 3_{15}$$

Potenciación

$$\boldsymbol{(\rho_\alpha)^n = {\rho^n}_{n\alpha}}$$

$$(2_{60})^4 = {2^4}_{4\cdot 60} = 16_{240}$$

Radicación

$$\sqrt[n]{\rho_\alpha}$$

Son n números complejos. Todos ellos tienen de módulo

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{p}}$$

Y sus argumentos se calculan por la fórmula:

$$\boldsymbol{\beta_i = \frac{\alpha + 360 \cdot k}{n} = (\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\ en\ radianes)}$$

Donde $\boldsymbol{k = 0, 1 \ldots n - 1}$

Con un ejemplo creemos que se entiende mejor.

Ejemplo 4

Calcular en forma polar las raíces quintas del siguiente complejo

$$\boldsymbol{\sqrt[5]{32_{60}}}$$

Como ***n=5,*** la solución son cinco complejos. Todos tienen de módulo

$$\boldsymbol{\rho_{raices} = \sqrt[5]{32} = 2}$$

Y sus argumentos se calculan según:

$$\boldsymbol{\beta_i = \frac{60 + 360 \cdot k}{5} =}$$

$$k = 0 \to \beta_1 = \frac{60}{5} = 12$$

$$k = 1 \to \beta_2 = \frac{60 + 360}{5} = 84(= 12 + 72)$$

$$k = 2 \to \beta_3 = \frac{60 + 360 \cdot 2}{5} = 156(= 84 + 72)$$

$$k = 3 \to \beta_4 = \frac{60 + 360 \cdot 3}{5} = 228(= 156 + 72)$$

$$k = 4 \to \beta_5 = \frac{60 + 360 \cdot 4}{5} = 300(= 228 + 72)$$

Las soluciones son:

$$\mathbf{2_{12}, 2_{84}, 2_{156}, 2_{228}\ y\ 2_{300}}$$

Los argumentos se pueden calcular también añadiendo al primer argumento, que hay que calcular por la fórmula, y sucesivamente a los siguientes, el ángulo de 72 grados que es 360/5