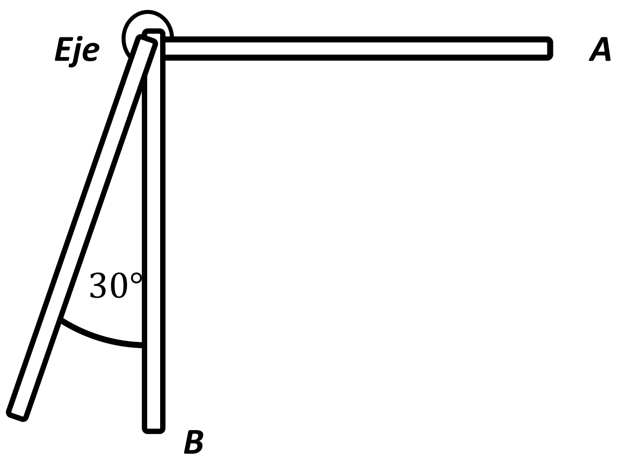
ROTACIONES EJE FIJO EN "CAÍDA LIBRE"

Cuando se dice "caída libre", nos referimos al giro de un sólido rígido respecto a un eje fijo y producido exclusivamente por el peso.

Ejemplo 1

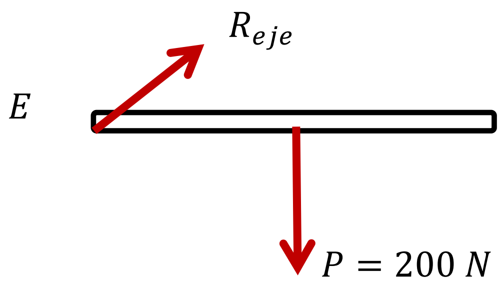
Una barra de $20\ Kg$ de masa y $2\ m$ de longitud se deja caer desde la posición inicial A horizontal, girando alrededor del eje E perpendicular a ella y que pasa por uno de sus extremos. Calcular la aceleración y la velocidad angulares en las posiciones B y C. Calcular también en esas posiciones la reacción en el eje.

El cálculo de las reacciones en el eje se hace, sobre todo, para dejar clara la idea que corresponde a la ley de Newton para sistemas de partículas: Las fuerzas exteriores se invierten en acelerar el ***C.M.*** Se trata de un punto y se le aplican las leyes como si fuera una partícula.



Posición A

Fuerzas



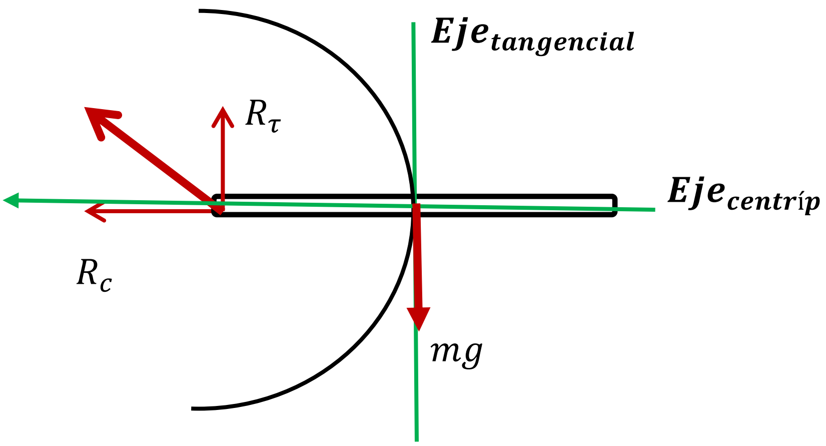
$$M_{eje} = I\alpha \rightarrow mg\frac{L}{2} = \left(\frac{1}{3}mL^2\right)\alpha \rightarrow \frac{1}{2}g = \frac{1}{3}L\alpha \rightarrow$$

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{L} = \frac{3}{4}g\ {}^{Rd}/_{s^2}}$$

Como se aprecia en la figura, y en los cálculos, el momento de la reacción en el eje es cero.

La velocidad angular, ya que se deja caer (parte del reposo se entiende) es cero.

Para calcular las reacciones en el eje, vamos a estudiar el CENTRO DE MASAS Y SUS ACELERACIONES TANGENCIAL Y CENTRÍPETA para después aplicar la ley de Newton a ambos ejes:



Conocemos la aceleración tangencial del centro de masas

$$a_\tau = \alpha \cdot R \rightarrow \boldsymbol{a_\tau} = \frac{3}{4}g \cdot \frac{L}{2} = \boldsymbol{\frac{3}{4}g\ {}^{m}/_{s^2}}$$

Y también la aceleración centrípeta del CM

$$\boldsymbol{a_c} = \omega^2 R = \boldsymbol{0}\ \ (\omega = 0)$$

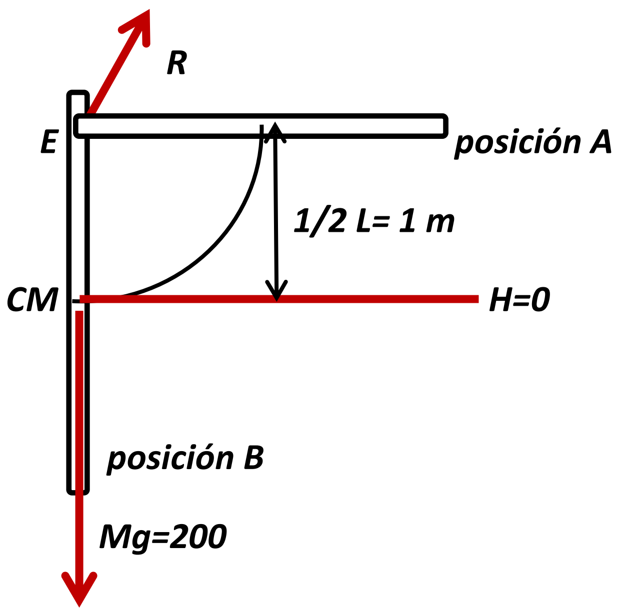
Y aplicando la ley de Newton a cada eje:

$$\sum F_\tau = ma_{\tau(CM)} \rightarrow mg - R_\tau = m\frac{3}{4}g \rightarrow \boldsymbol{R_\tau = \frac{1}{4}mg\ N}$$

(El peso va a favor de la aceleración tangencial –de hecho, es debido al peso por lo que la barra gira y acelera su centro de masas- y por eso se ha puesto positivo)

$$\sum F_c = ma_{c(CM)} \rightarrow \boldsymbol{R_c} = m \cdot 0 = \boldsymbol{0\ N}$$

Posición B



Para calcular la aceleración angular, como antes:

$$M = I\alpha \rightarrow 0 = I\alpha \rightarrow$$

$$\alpha = 0\ {}^{Rd}/_{s}$$

Pues la línea de aplicación del peso pasa por el eje y, por lo tanto, la distancia de esa línea al eje (brazo de la fuerza) es cero y también su momento. El momento de la reacción en el eje es cero claramente porque esa fuerza está en el eje.

Para calcular la velocidad angular en este tipo de problemas aplicamos siempre el teorema de la energía (que normalmente se va a conservar salvo que haya momentos debidos al rozamiento en el eje) entre la posición inicial, de energía conocida en este caso la posición ***A***, y la posición que queramos conocer. Tener siempre en cuenta que la energía potencial gravitatoria es la que posee su CENTRO DE MASAS.

$$W_{NC} = \Delta E_m \rightarrow$$

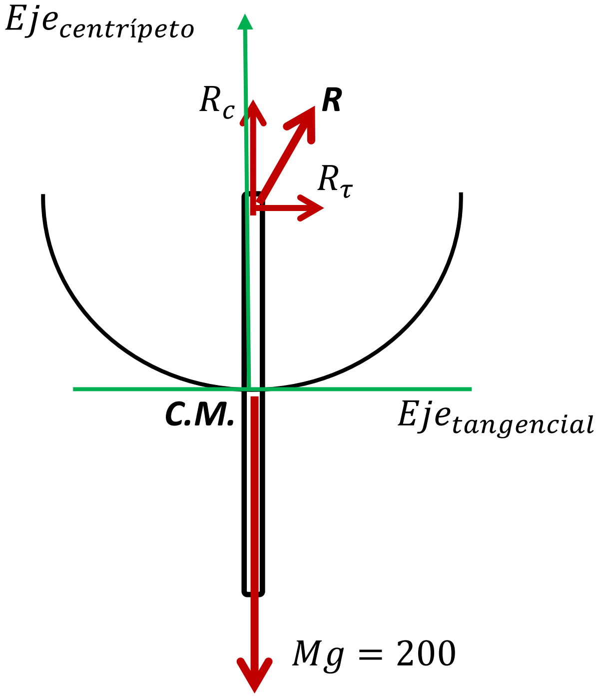
$$\begin{cases} \boldsymbol{W_{NC}} = W_{Reacción} = \mathbf{0}\ (\boldsymbol{no\ se\ desplaza}) \\ \Delta \boldsymbol{E_m} = \begin{cases} Em_A = mg\frac{L}{2} \\ Em_B = \frac{1}{2} \cdot I_e \cdot \omega^2 \end{cases} \rightarrow \Delta \boldsymbol{E_m} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{I_e} \cdot \boldsymbol{\omega^2} - \boldsymbol{mg}\frac{\boldsymbol{L}}{\mathbf{2}} \end{cases}$$

Aplicando el teorema:

$$0 = \frac{1}{2} \cdot I_e \cdot \omega^2 - mg\frac{L}{2} \rightarrow$$

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{3}mL^2\omega^2 \rightarrow \boldsymbol{\omega} = \sqrt{\frac{3g}{L}} \approx \sqrt{\mathbf{15}}\ \boldsymbol{Rd}/_{\boldsymbol{s}}$$

Para calcular las reacciones en el eje procedemos como en la posición ***A***



$$a_{\tau(CM)} = \alpha \cdot R = 0 \cdot \frac{L}{2} = 0 \cdot 1 = 0$$

$$a_{c(CM)} = \omega^2 R = \frac{3g}{2} \cdot \frac{L}{2} = \frac{3g}{2}\ {}^{m}/_{s^2}$$

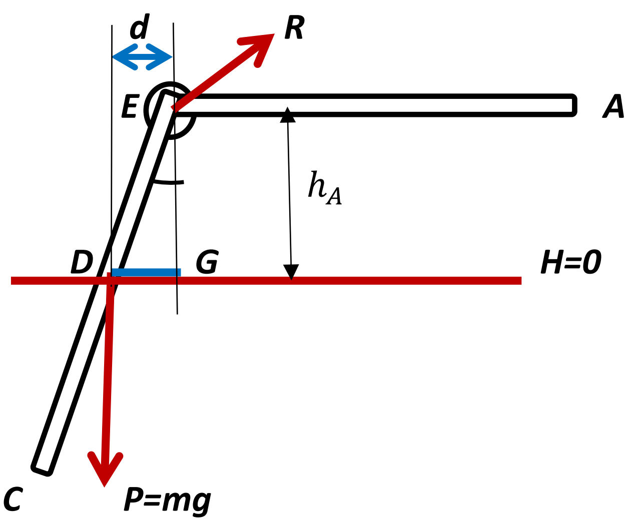
Y aplicando las leyes de Newton:

$$\sum F_\tau = ma_{\tau(CM)} \rightarrow \boldsymbol{R_\tau} = m \cdot 0 = \mathbf{0}$$

$$\sum F_c = ma_{c(CM)} \rightarrow R_c - mg = m3g \rightarrow \boldsymbol{R_c = 4mg\ N}$$

Nótese que al aplicar la ley al eje centrípeto se han restado a las fuerzas que van hacia el centro de giro del centro de masas (R_c) las que van hacia "afuera" (el peso).

Posición C



$$M = I\alpha \rightarrow 0 - mgd = \frac{1}{3}mL^2\alpha \rightarrow -mg\frac{L}{2}sen30 = \frac{1}{3}mL^2\alpha \rightarrow$$

$$-\frac{1}{4}g = \frac{1}{3}L\alpha \rightarrow \boldsymbol{\alpha = -\frac{3g}{4L}\ {}^{Rd}/_{s^2}}$$

Donde se ha puesto el signo menos al momento del peso porque elegimos como positivo el sentido del giro, en este caso en el sentido de las agujas del reloj. El momento del peso haría girar a la varilla en sentido contrario, de ahí el signo negativo de su momento. La aceleración angular negativa indica que la varilla en esta posición va disminuyendo su velocidad angular.

Para calcular la velocidad volvemos a aplicar el teorema de la energía entre la posición ***A*** y la posición ***C***

$$\boldsymbol{W_{NC} = W_R = 0}$$

$$\Delta E_m = \begin{cases} E_{mA} = mgh_A = mg\frac{L}{2}cos30 \\ E_{mB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mL^2\right)\omega^2 \end{cases}$$

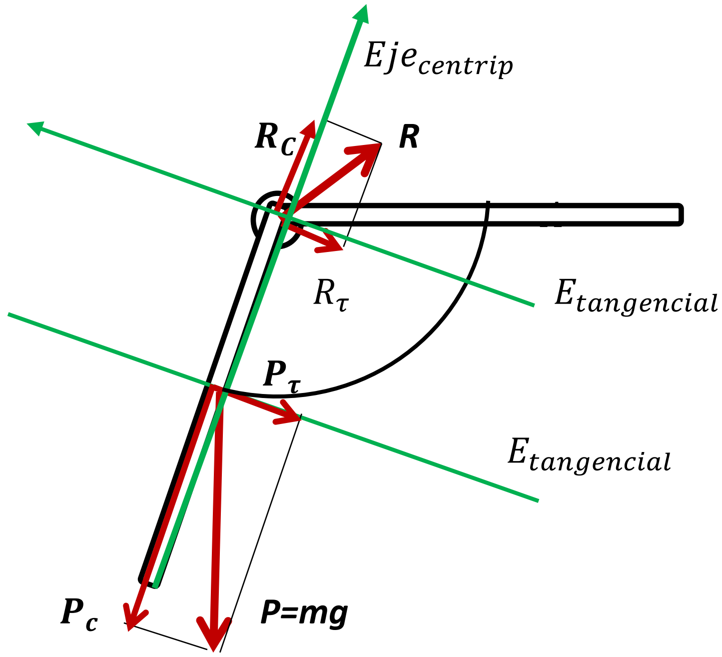
$$\boldsymbol{\Delta E_m = \frac{1}{2}\frac{1}{3}mL^2\omega^2 - mg\frac{L}{2}cos30}$$

Aplicando el teorema:

$$0 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}mL^2\omega^2 - mg\frac{L}{2}cos30$$

$$g\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{6}L\omega^2 \rightarrow \boldsymbol{\omega} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{3\sqrt{3}g}}{\boldsymbol{2L}}}\boldsymbol{Rd/_s}$$

Para calcular la reacción en el eje procedemos como en los casos anteriores



Donde la componente centrípeta de la reacción debe ir hacia el centro de giro ya que la componente centrípeta del peso va hacia afuera. Sobre su componente tangencial no podemos inicialmente suponer un sentido, como en el caso de la componente centrípeta, y la hemos dibujado arbitrariamente. Su valor y sentido se conocerá aplicando las leyes de Newton a ambos ejes:

$$\sum F_c = m\omega^2 R \rightarrow R_c - P_c = m\omega^2 R \rightarrow$$

$$R_c - mgcos30 = m\frac{3\sqrt{3}g}{2L}\frac{L}{2} \rightarrow R_c = \frac{5\sqrt{3}}{4}mg = \frac{5\sqrt{3}}{4}200$$

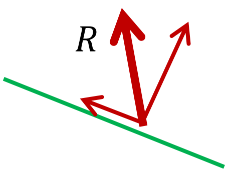
$$\boldsymbol{R_c = 250\sqrt{3}\ N}$$

Siendo el sentido del giro el elegido positivo, las dos componentes tangenciales, la del peso y la de la reacción del eje, son negativas puesto que van en contra del giro.

$$\sum F_\tau = m\alpha R \rightarrow -mgsen30 - R_\tau = m\left(-\frac{3g}{4L}\right)\frac{L}{2} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{R_\tau} = -\frac{1}{8}mg = \boldsymbol{-25\ N}$$

El signo negativo, como decíamos en el párrafo anterior, nos indica que la reacción en el eje es de sentido contrario al dibujado.



Y no la dibujada en principio. Insistimos que inicialmente se dibuja arbitrariamente y, como vemos, es el cálculo el que nos dirá al final cual es el sentido de las dos componentes y, por lo tanto, el de la resultante.