victor loza
ACADEMIA ONLINE

RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO

En esta lección vamos a ver cómo, conocida una razón trigonométrica de un ángulo, calculamos las demás.

Podemos decir que hay dos tipos, aunque hacemos esta distinción por razones didácticas. El primero, y más sencillo, es cuando conocemos el seno o el coseno del ángulo. El segundo tipo es cuando conocemos la tangente. Si tenemos como dato la secante, cosecante o cotangente, calculamos a partir de ellas el coseno, el seno o la tangente. Ya hemos comentado en la lección anterior que las tres fundamentales son seno, coseno y tangente. Veamos ejemplos

Ejemplo 1

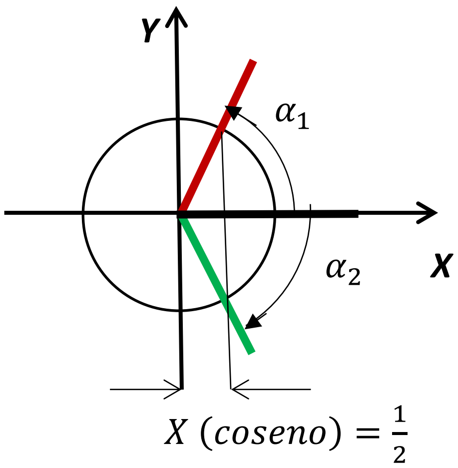
Sabiendo que $\boldsymbol{cos\alpha = \frac{1}{2}}$ y que $\boldsymbol{\alpha}$ pertenece al cuarto cuadrante deducir las demás razones trigonométricas:

Este es el caso más sencillo, cuando conocemos el seno o el coseno. Utilizamos la fórmula fundamental:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \rightarrow sen^2\alpha + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \rightarrow sen^2\alpha = 1 - \frac{1}{4} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{sen\alpha} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\boldsymbol{2}}$$

Tenemos que elegir el signo porque con el mismo coseno, $\frac{1}{2}$, tenemos dos ángulos, $\alpha_1\ y\ \alpha_2$, con senos iguales en longitud, pero opuestos en signo como indica la figura:



El ángulo α_1 pertenece al primer cuadrante y tiene la altura y por lo tanto el seno positivo $sen\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. El ángulo α_2 pertenece sin embargo al cuarto cuadrante y tiene por lo tanto la altura y el seno negativo $sen\alpha_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ **Si en el enunciado no nos hubieran dicho a qué cuadrante pertenece el ángulo, las dos soluciones hubieran sido válidas, pero al decirnos que pertenece al cuarto cuadrante la solución para el seno es**

$$\boldsymbol{sen\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Las demás razones se calculan aplicando las fórmulas:

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha} = 2$$

$$cosec\alpha = \frac{1}{sen\alpha} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Como hemos dicho, en el caso de conocer el seno o el coseno (o la secante o la cosecante que son sus inversos) el problema es el más sencillo, como el problema anterior. Un poquito más largo es cuando conocemos la tangente o la cotangente, como en el problema siguiente. Lo vamos a resolver sin utilizar nada más que las fórmulas conocidas. Hay muchas fórmulas, como se ha dicho, pero en muchos cálculos es más difícil aprendérselas que el tiempo que ahorran en el problema**. Cuando se tenga duda, en estos problemas y en muchos, lo mejor es poner todo en función de senos y cosenos que son las razones esenciales.**

Ejemplo 2

Calcular las razones trigonométricas de un ángulo del segundo cuadrante cuya $\boldsymbol{tg\alpha = -1}$

$$tg\alpha = -1 \rightarrow \frac{\boldsymbol{sen\alpha}}{\boldsymbol{cos\alpha}} = \boldsymbol{-1}$$

Ecuación en seno y coseno, dos incógnitas, pero no nos olvidamos de la ley principal:

$$\boldsymbol{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

Quedándonos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{sen\alpha}}{\boldsymbol{cos\alpha}} = \boldsymbol{-1} \quad (\boldsymbol{1}) \\ \boldsymbol{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1} \quad (\boldsymbol{2}) \end{cases}$$

Despejando en (1) el seno por ejemplo y sustituyendo en (2) (método de sustitución en la resolución de los sistemas) nos queda:

$$de\ (1)\ \boldsymbol{sen\alpha = -cos\alpha}\ sustituyendo\ en\ (2) \rightarrow (-cos\alpha)^2 + cos^2\alpha = 1$$

$$\rightarrow 2cos^2\alpha = 1 \rightarrow \boldsymbol{cos\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\boldsymbol{\sqrt{2}}}{\boldsymbol{2}}$$

Al igual que antes, decidimos el signo por la información que tenemos: el ángulo pertenece al segundo cuadrante y, por lo tanto, su anchura, su "equis", es negativa y, por lo tanto, su coseno también:

$$\boldsymbol{cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Conocido el coseno, sustituimos en la ecuación de la que hemos despejado el seno en función del coseno (como en cualquier sistema cuando utilizamos el método de sustitución)

Como $sen\alpha = -cos\alpha \rightarrow \boldsymbol{sen\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

Y las otras tres razones trigonométricas se calculan aplicando las fórmulas vistas.

Se advierte que elegido una vez el signo de una razón trigonométrica **ya no hay que volver a elegirlo** cuando se calculan las demás; si todo está bien hecho cuadran los resultados (en nuestro caso el seno ha salido con su signo positivo, por estar en el segundo cuadrante, sin tener que elegirlo).

También, si "nos acordamos" de la siguiente identidad, lo podemos hacer más corto (consultar formulario)

$$\boldsymbol{\frac{1}{cos^2x} = 1 + tg^2x}$$

Podemos relacionar directamente la tangente con el coseno

$$tg\alpha = -1 \rightarrow \frac{1}{cos^2x} = 1 + 1 \rightarrow cos^2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow cosx = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

A partir de aquí, el proceso es exactamente igual.