DIBUJO DE CURVAS “SIMPLES”

En esta lección hay varios conceptos de los que ya se hablado en las lecciones dedicadas a ello en matemáticas de 1º. Aquí las recordaremos también, pero aconsejamos mirar esas lecciones para complementar esta.

Para dibujar una curva y, por lo tanto, conocer visualmente el comportamiento de una función, vamos a fijarnos en sus características más importantes y cómo conocerlas. Al final del estudio también podemos añadir una tabla de valores, que también es una buena herramienta cuando haya dudas.

Empezamos definiendo las características fundamentales que definen a una función y como deducirlas, todo ello acompañado por un ejemplo.

Estudiemos la función

$$\boldsymbol{y = \frac{x^2 + 1}{x}}$$

CARACTERÍSTICAS A ESTUDIAR

1 DOMINIO

Se define el dominio de una función como el **conjunto de valores de x para los cuales existe la función y.** En funciones “normales” dadas en forma explícita, como el ejemplo, tenemos cuatro casos principales en los que fijarnos. Aunque se han visto ejemplos parecidos en las lecciones de 1º de bachiller, recordamos aquí también cómo se resuelven los dominios de las funciones que tenemos que conocer.

a) **Funciones en cuya expresión aparecen denominadores**:

Ya que no tiene sentido dividir entre cero, el dominio de estas funciones estará formado, en principio, por todos **los valores de x excepto los que anulen el denominador**. En nuestro ejemplo:

$$\boldsymbol{D} = \{\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} / \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\}$$

Ya que ***x=0*** anula nuestro denominador y por lo tanto no tiene imagen (y).

b) **Funciones en las que aparecen raíces cuadradas y pares en general:**

Sabemos que la raíz cuadrada o par de un número negativo no existe. Por lo tanto, el dominio de estas funciones será **el conjunto de valores de x para los que el radicando es positivo.** Veamos un ejemplo:

$$y = \sqrt[2]{\frac{x}{x-1}}$$

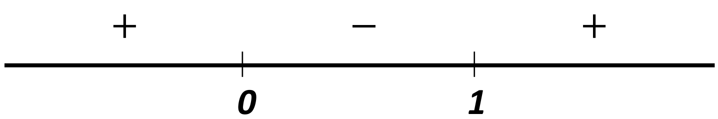
Primero definimos el dominio por su propiedad:

$$\boldsymbol{D} = \left\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} / \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x-1}} \geq \boldsymbol{0}\right\}$$

Para que pueda existir la raíz cuadrada. Ahora decimos qué valores de x son esos, definiendo el dominio por extensión se dice. Para ello, recordar cómo se resuelve **una inecuación consultando la lección dedicada a ello en matemáticas de 1º de bachiller**.

$$\frac{x}{x-1} \geq 0$$

Para resolverla, calculamos los valores de x que anulan el numerador y el denominador: $\boldsymbol{x = 0}$. $x - 1 = 0 \rightarrow \boldsymbol{x = 1}$ y ponemos estos valores de x en la recta de los números reales



Hemos hecho esto porque se sabe, debemos de saber, que el signo de una función, en este caso $\boldsymbol{\frac{x}{x-1}}$, sólo puede cambiar en los valores de x que anulan su numerador y denominador, por lo que basta saber qué signo tiene para una "x" de cada intervalo.

En nuestro caso

Para ***x=-10***

$$\frac{x}{x-1}=\frac{-10}{-10-1}>0$$

Para ***x=0.5***

$$\frac{x}{x-1}=\frac{0.5}{0.5-1}<0$$

Para ***x=10***

$$\frac{x}{x-1}=\frac{10}{10-1}>0$$

Visualizamos todo ello en la figura anterior. El dominio de la función $y=\sqrt[2]{\frac{x}{x-1}}$ son los valores de x que están en los intervalos marcados con un signo más:

$$\boldsymbol{D=\{x\in R/x\in(-\propto\ 0]\cup(1\ \propto)\}}$$

Donde se incluye el cero pues para ese valor de x la función vale cero y por lo tanto existe y se excluye el uno pues para él la función no existe por anular el denominador.

c) Funciones logarítmicas: $\mathbf{y=lg\ (f(x))}$

De la definición de logaritmo se deduce que $\boldsymbol{f(x)}$ **ha de ser estrictamente positiva** por lo que el domino de estas funciones son los valores de x que hacen que $f(x)$ sea positiva. Deberemos por ello resolver la inecuación:

$$\boldsymbol{f(x) > 0}$$

Como se resolvió una inecuación en el apartado anterior

El cuarto caso, el siguiente, lo añadimos por rigor, aunque es poco probable que aparezca en nuestros problemas

d) Funciones Arcsenx y Arccosx

Debemos de saber, por la definición de ***Arcsenx*** y ***Arccosx,*** que las funciones $f(x)$ tienen que tomar valores entre más y menos uno (no hay ángulos cuyo seno o coseno sea mayor que 1 o menor que -1). Por ello, para calcular el dominio deberemos resolver las inecuaciones:

$$\boldsymbol{-1 \leq f(x) \leq 1}$$

Resolviendo cada una por separado y dando como solución de dominio los valores de x intersección de ambas inecuaciones, pues son ellos los que las cumplen a la vez.

Seguimos con el estudio de la función

$$\boldsymbol{y = \frac{x^2 + 1}{x}}$$

Ya conocemos la primera característica fundamental, su dominio

$$\boldsymbol{D = \{\forall x \in R / x \neq 0\}}$$

2 CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Sabemos por teoría que **una función crece en los valores de x que hacen su primera derivada positiva y decrece en los que la hacen negativa. En los puntos donde la derivada se anula tenemos máximos si $\boldsymbol{y'' < 0}$, mínimos si $\boldsymbol{y'' > 0}$** y puntos de inflexión horizontales, más raros, en los que la segunda derivada vale cero (Punto de inflexión es aquel donde la curva cambia de curvatura (cóncava y convexa). En el apartado dedicado a la curvatura se habla de ellos con más detalle).

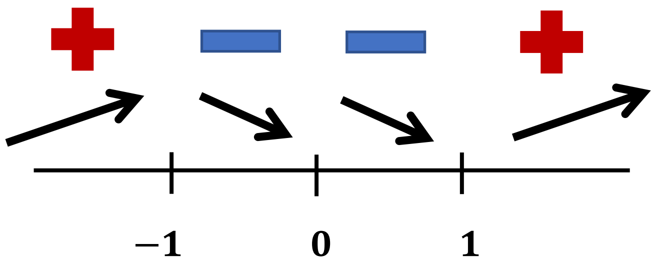
Teniendo esto en cuenta, nos basta saber cuándo la primera derivada es positiva y cuándo es negativa para saber para que valores de "x" la función crece o decrece. Estudiamos, por lo tanto, el signo de la primera derivada. Se resuelve una inecuación como en los ejemplos que se han comentado más arriba $\boldsymbol{y' \lesseqgtr 0}$

En nuestro caso:

$$\boldsymbol{y = \frac{x^2+1}{x}} \rightarrow \boldsymbol{y'} = \frac{2x \cdot x - (x^2+1) \cdot 1}{x^2} = \boldsymbol{\frac{x^2-1}{x^2}}$$

Y, para estudiar su signo, calculamos los valores de x que anulan numerador y denominador

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \\ \quad x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \end{cases}$$



Para ***x=-10*** la derivada es positiva

Para ***x=-0,5*** la derivada es negativa

Para ***x=0,5*** la derivada es negativa

Para ***x=10*** la derivada es positiva

Información que visualizamos en la figura. Por lo que la función crece hasta ***-1***, decrece entre ***-1 y 1***, y crece a partir de ***1***.

Como para

$$\boldsymbol{x = -1} \;\rightarrow\; f(-1) = \frac{(-1)^2+1}{-1} = -2 \rightarrow \boldsymbol{P(-1,-2)}$$

El punto P es un máximo relativo. Se dice relativo porque es el valor máximo de la función en sus alrededores. Lejos de este valor de *"x"* la función puede tomar valores más grandes.

Y para

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{1} \rightarrow f(1) = \frac{1^2 + 1}{1} = 2 \rightarrow \boldsymbol{Q}(\mathbf{1}, \mathbf{2})$$

Siendo el punto Q un mínimo relativo de la función**,** como también se observa en la figura por el comportamiento de las flechas.

Para ***x=0*** no existe la función si nos acordamos del dominio. Como veremos ahora, los puntos cuya "x" anulan el denominador son posibles asíntotas verticales.

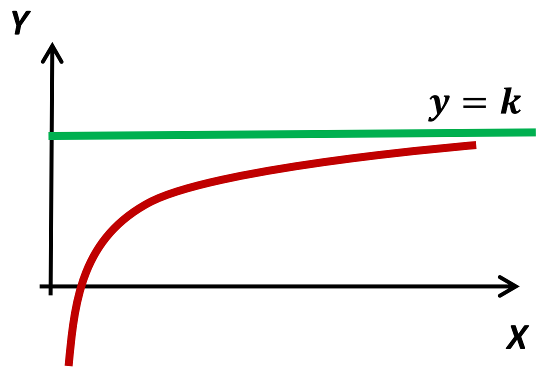
3 ASÍNTOTAS

Se ha hablado de las asíntotas también, insistimos otra vez, en las lecciones dedicado a ellos en matemáticas de 1º de bachiller.

Asíntotas son rectas a las que la gráfica se acerca, pero sin llegar a tocar. Tenemos de tres tipos:

a) Asíntotas horizontales:

Tienen la siguiente "pinta" en verde



Son rectas horizontales, por lo tanto $y = k$, siendo k la altura a la que tiende la función cuando la variable *x* tiende a más o menos infinito. Por lo tanto, se calculan

$$\boldsymbol{y = k = \lim_{x \to \pm \propto} f(x)}$$

En nuestro caso:

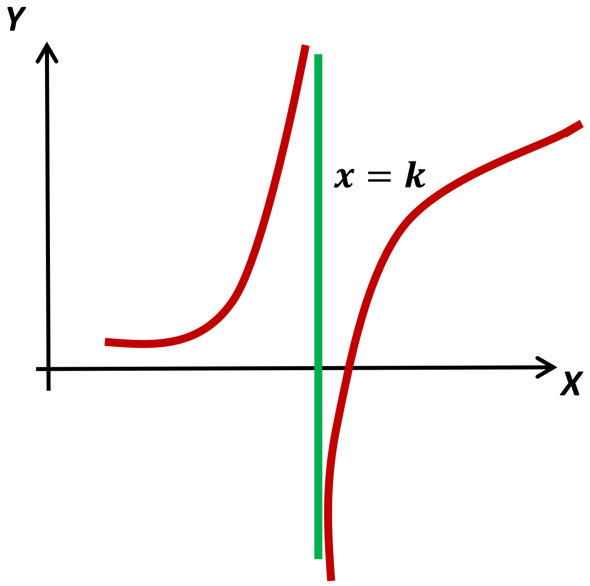
$$y = k = \lim_{x \to +\propto} \frac{x^2 + 1}{x} = \lim_{x \to +\propto} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to \infty} x = +\infty$$

$$y = k = \lim_{x \to -\propto} \frac{x^2 + 1}{x} = \lim_{x \to -\propto} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

No teniendo por lo tanto nuestra función asíntotas horizontales puesto que se hace muy grande por la derecha hacia arriba y muy grande por la izquierda hacia abajo, no tendiendo a ninguna altura y no acercándose por lo tanto a ninguna recta horizontal.

b) Asíntotas verticales:

Tienen la siguiente "pinta"

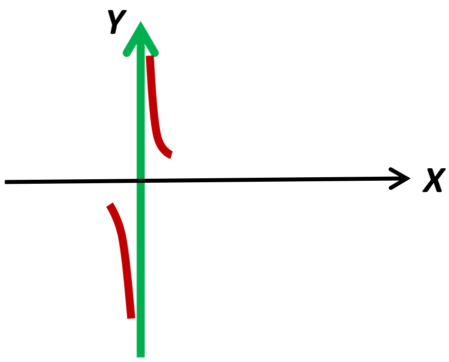


Son rectas verticales, por ello $\boldsymbol{x = k}$**,** tal que la función, como se observa en la figura, tiende a más o a menos infinito cuando ***"x"*** se acerca a ese valor. Por ello, nos tendremos que preocupar en deducir para que posibles valores de ***x*** la función se hace muy grande, positiva o negativa. El caso más normal en que ocurre esto es para los valores de x que anulan denominadores (evidentemente hay otros casos, por ejemplo, la función logaritmo tiende a menos infinito cuando el número del que se quiere calcular el logaritmo tiende a cero por la derecha…).

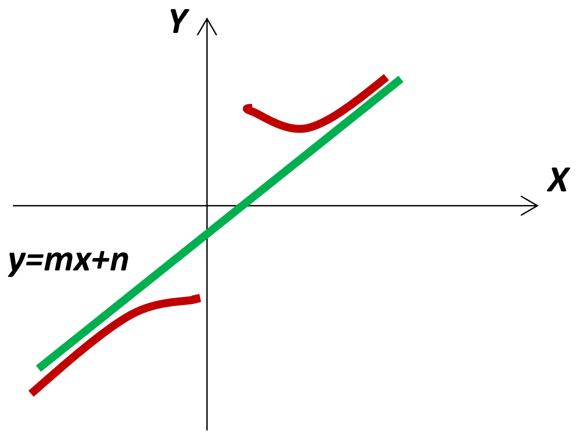
En nuestro ejemplo, $\boldsymbol{y = \frac{x^2+1}{x}}$, el valor de ***x*** que anula el denominador es ***x=0***. Para comprobar que, efectivamente, es asíntota vertical es **obligatorio demostrar que la función tiende a más o a menos infinito:**

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\propto$$
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\propto$$

Con lo que queda demostrado que $\boldsymbol{x = 0}$ es una asíntota vertical, teniendo la gráfica en sus alrededores la siguiente "pinta":



c) **Asíntotas oblicuas**:



Como se ve en la figura, son rectas oblicuas de ecuación

y=mx+n

Para deducir los parámetros que la definen, **se sabe que *m* y *n* se calculan con las siguientes expresiones:**

$$\boldsymbol{m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}}$$

$$\boldsymbol{n = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx}$$

Donde ***m*** tiene que ser distinto de $\pm\infty$, claramente, y también distinto de cero porque en ese caso sería una recta vertical y correspondería a una asíntota vertical que ya hemos estudiado. Nos podemos aprender que **si hay asíntotas horizontales no hay oblicuas** (***m*** daría cero) y que **las funciones con asíntotas oblicuas suelen tener un polinomio en el numerador y otro en el denominador de grado una unidad inferior al numerador**, como en nuestro caso:

$$\boldsymbol{y = \frac{x^2+1}{x}}$$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x} - 1 \cdot x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Siendo por ello nuestra asíntota oblicua la recta

$$\boldsymbol{y = x}$$

4 SIGNO DE LA FUNCIÓN

Como se puede entender fácilmente, el **saber cuándo la función está por encima del eje X (es positiva) y cuando está por debajo (es negativa) es una característica muy importante para visualizar el dibujo** de la función. Por ello estudiaremos el signo de la función:

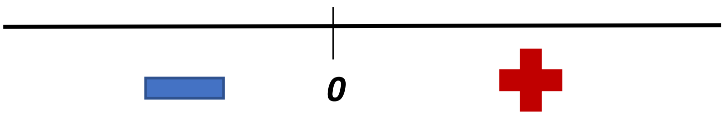
$$y = \frac{x^2+1}{x}$$

Al igual que para estudiar el signo de la primera derivada, calculamos los valores de x que anulan el numerador y el denominador de la función:

$$x^2 + 1 = 0 \to x = \sqrt{-1}$$

$$x = 0$$

Poniendo, como hemos hecho en casos anteriores, sobre la recta de los reales sólo el valor de x=0 ($x = \sqrt{-1}$ no es número real)



Dado que

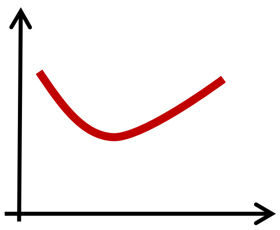
$$x = -1 \to y = \frac{1^2+1}{-1} = -2 < 0$$

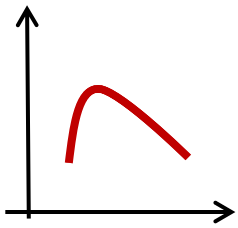
$$x = 1 \to y = \frac{1^2+1}{1} = 2 > 0$$

Podemos decir entonces que la función para valores de "x" menores que cero es negativa y que para valores mayores es positiva

Estos cuatro puntos son las características más importantes que nos permiten dibujar una función. Sin embargo, hay más características que conviene estudiar para afinar más el dibujo (aparte de que nos las pueden exigir). Son las siguientes

5 CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD. CURVATURA





$y'' > 0$ $\qquad\qquad$ $y'' < 0$

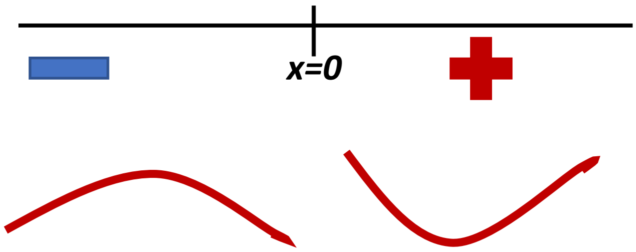
El nombre de cada una de ellas es lo de menos. Según nuestro criterio, preferimos seguir el convenio del lenguaje hablado (también en ciencias como física, arqueología…) y respetar la etimología de la palabra. La figura de la izquierda es cóncava (la palabra proviene de cuenco, con cavare en latín que significa hacer huecos en la piedra) y la derecha es convexa. Evidentemente es un convenio y depende desde donde se vea la figura es una cosa u otra. Lo que está claro es que un cuenco se pone como en el dibujo de la izquierda para comer la sopa y no al revés, como la cuenca de un rio se ve desde arriba y no bajo el punto de vista de un topo que esté por debajo. El lío de nombres nos parece innecesario y por ello **lo que tiene que quedar claro es que la forma de la izquierda tiene la segunda derivada positiva y la de la derecha la tiene negativa**, aunque nosotros, por lo que se ha dicho, seguiremos llamando cóncava a la forma izquierda y convexa a la forma de la derecha.

De lo anterior se desprende que para conocer la curvatura de una gráfica basta con estudiar el signo de la segunda derivada. En nuestro ejemplo:

$$y' = \frac{x^2-1}{x^2} \to y'' = \frac{2x\cdot x^2-(x^2-1)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

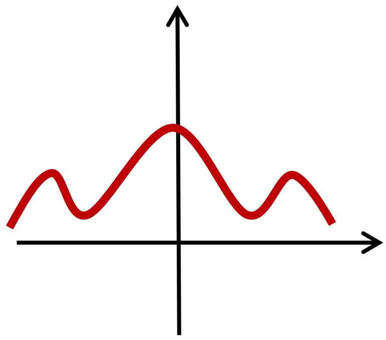
$$\boldsymbol{y'' = \frac{2}{x^3}}$$

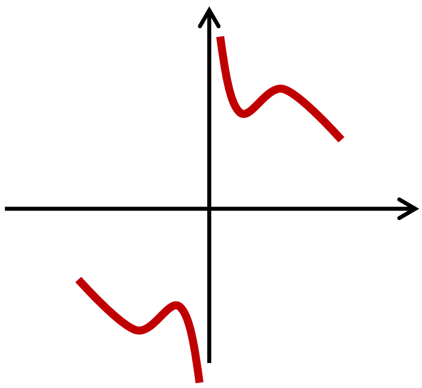
Cuyo signo es negativo para x negativas y positivo para x positivas:



En ***x=0*** la curva cambia de cóncava a convexa. Si para ***x=0*** existiera la función este punto sería un punto de inflexión (por cambiar de curvatura). Sin embargo, en nuestro caso tal punto no existe (recordar cuál es el dominio) y nuestra gráfica no tiene puntos de inflexión.

6 SIMETRIAS





Simetría eje Y o par **Simetría respecto al origen o impar**

$$\boldsymbol{f(x) = f(-x)}$$ $$\boldsymbol{f(x) = -f(-x)}$$

Veamos en nuestro caso:

$$\boldsymbol{f(x)} = \frac{x^2+1}{x} \to f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x} = -\frac{x^2+1}{x} = -\boldsymbol{f(x)}$$

Por lo que es una función impar. Se puede también ver dándole valores a x contrarios y ver que la función pasa también a ser contraria: $f(1) = 2$ y $f(-2) = -2$

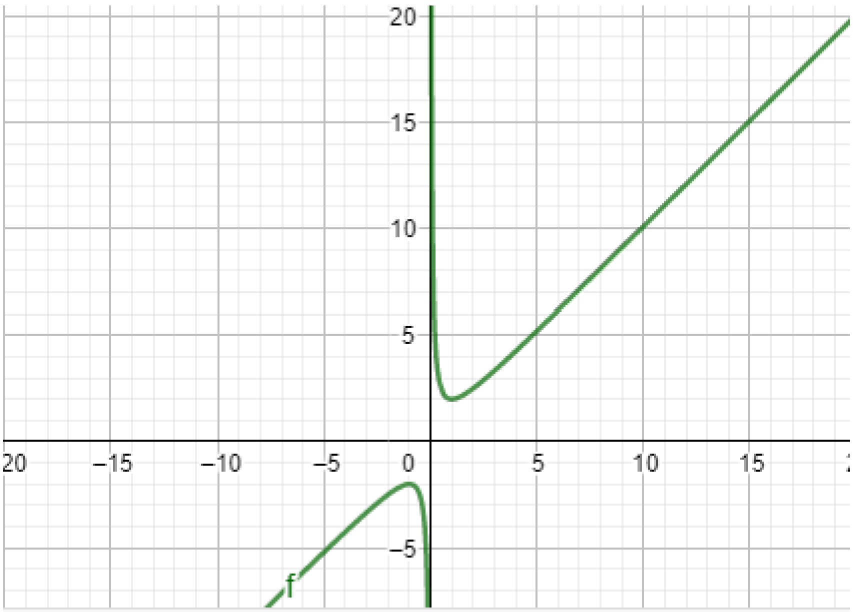
Daríamos algunos valores más para estar más seguros de que se cumple para todas las x.

Con todas estas características conocidas el dibujo de la gráfica tiene que ser sencillo, si todo está bien hecho los resultados cuadran enseguida y sin esfuerzo. Si, por el contrario, hay algún punto o característica mal calculada el dibujo se resiste un montón y, por ello, cuando esto ocurra lo mejor es repasar cuidadosamente todos los cálculos.

Nosotros creemos que lo mejor es seguir cierto orden a la hora de tener en cuenta las características calculadas. El signo de la función, dominio, asíntotas y crecimiento son, como hemos dicho, las primeras a tener en cuenta.

Dibujaremos primero las asíntotas y los máximos y mínimos. Después, teniendo en cuenta el signo, tacharemos los trozos del plano por donde no puede estar. En nuestro caso, como para “x” negativas la función es negativa tacharemos la parte por encima del eje X hasta ***x=0.*** Si con todo ello todavía no está muy claro haremos una tabla de valores.

Nuestro dibujo es el siguiente



Donde observamos que se cumplen todas las características que hemos deducido.