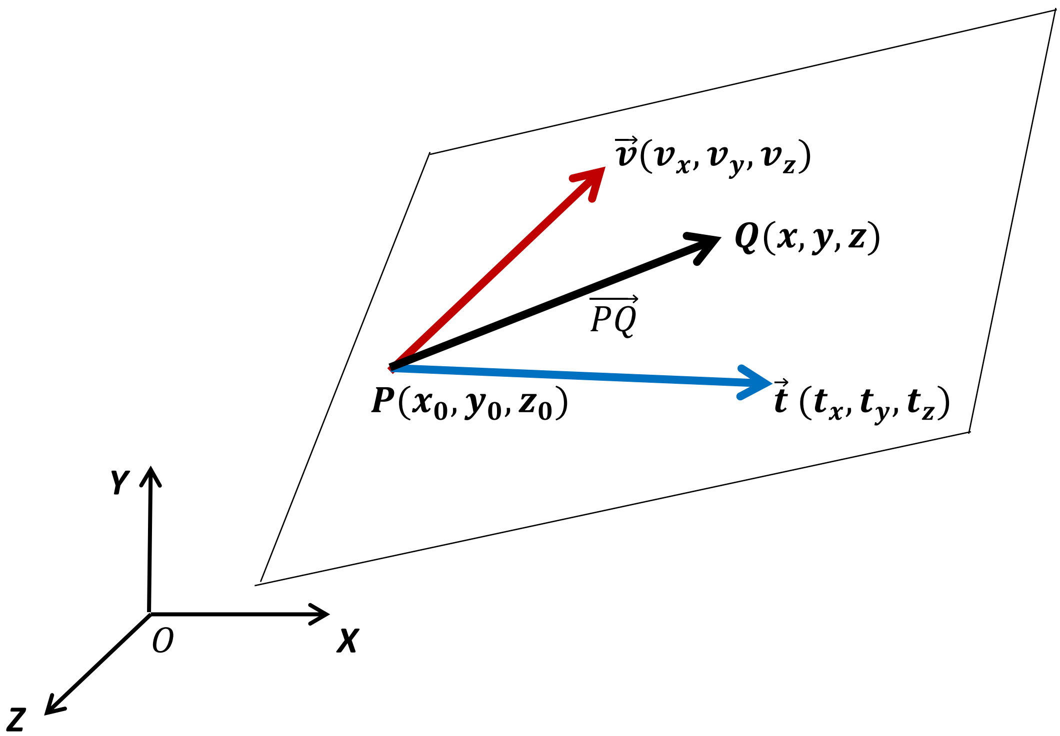
ECUACIÓN DEL PLANO

Al igual que en el caso de la recta, tenemos que saber qué elementos fundamentales determinan un plano y por lo tanto su ecuación**. Los elementos que definen a un plano son dos vectores en los que se "apoya", que indican su dirección, y un punto por el que pasa, que indica su posición.** En la figura, los dos vectores son $\vec{v}\ y\ \vec{t}$ y el punto $P(x_0, y_0, z_0)$



Como vemos en la figura, para que un punto Q pertenezca al plano, el vector $\overrightarrow{PQ}$ ha de estar en el mismo plano que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{t}$ o, lo que es lo mismo, debe de ser combinación lineal de ellos y, por lo tanto, el determinante formado por los tres ha de valer cero:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_x & v_y & v_z \\ t_x & t_y & t_z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

Que desarrollando nos da:

$$\boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0}$$

Se demuestra fácilmente que **el vector de coordenadas** $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ que aparece en la ecuación anterior **ES UN VECTOR PERPENDICULAR AL PLANO**. Esta idea nos dará pie, como veremos, para calcular la ecuación de un plano conociendo un punto por el que pasa y un vector perpendicular a él. **Son las dos maneras que tendremos de calcular la ecuación de un plano y los datos que nos hacen falta en ellas: dos vectores en los que se apoya y un punto o un vector perpendicular a él y un punto, son lo que deberemos de buscar siempre para calcular la ecuación de un plano.**

La anterior ecuación indica la condición que tienen que cumplir los puntos del espacio para que pertenezcan al plano, o sea, es la ecuación del plano que buscábamos.

También podíamos haber trabajado de la siguiente manera:

Dado que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{v}\ y\ \vec{t}$, sabemos (ver la lección sobre combinación lineal de vectores) que existen dos números reales $\gamma\ y\ \mu$ tales que:

$$\overrightarrow{PQ} = \gamma \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{t} \rightarrow$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \gamma(v_x, v_y, v_z) + \mu(t_x, t_y, t_z) \rightarrow$$

Igualando componentes y despejando x, y y z, nos queda

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = x_0 + \gamma v_x + \mu t_x} \\ \boldsymbol{y = y_0 + \gamma v_y + \mu t_y} \\ \boldsymbol{z = z_0 + \gamma v_z + \mu t_z} \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones que reciben el nombre de ecuaciones paramétricas del plano. Como se ve, el plano depende de dos parámetros (tiene por lo tanto dos dimensiones) mientras que la recta depende sólo de uno (por lo tanto, una recta tiene una dimensión como se ha dicho ya).

Ejemplo

Calcular la ecuación de un plano que pasa por el punto $\boldsymbol{P(1,2,3)}$ y es perpendicular al vector $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{-1,2,4})$

Como sabemos por la ecuación anterior, los coeficientes del vector $\vec{v}$ han de ser los coeficientes de las variables x, y, z en la ecuación del plano. Por lo tanto, tendrá la forma de:

$$-1 \cdot x + 2y + 4z + D = 0$$

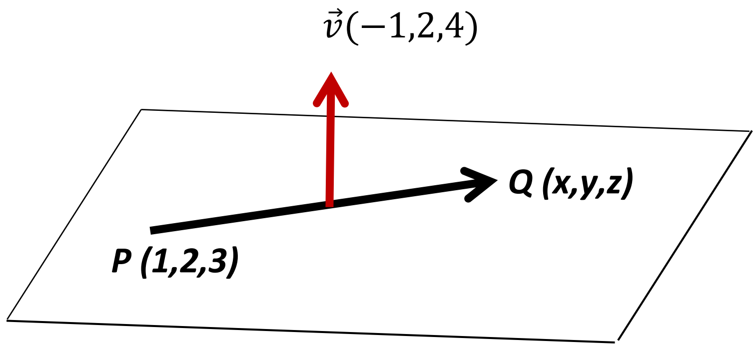
Y como pasa por el punto dado, sus coordenadas han de cumplir la ecuación, **lo que nos permite calcular *D***:

$$-1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + D = 0 \rightarrow D = -15$$

Quedando la ecuación del plano pedido:

$$\boldsymbol{-x + 2y + 4z - 15 = 0}$$

La explicación ya está dada en los párrafos anteriores, pero también podemos dar otra para llegar a la misma conclusión que creemos es interesante:



Como vemos en la figura, el vector $\overrightarrow{PQ}$ ha de ser perpendicular al vector $\vec{v}$ si queremos que el punto Q pertenezca al plano. Por lo tanto, su producto escalar ha de ser cero (condición de perpendicularidad):

$$\begin{cases} \vec{v} = (-1,2,4) \\ \overrightarrow{PQ} = (x-1, y-2, z-3) \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v} \rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0} \rightarrow$$

$$-1 \cdot (x-1) + 2 \cdot (y-2) + 4(z-3) = 0 \rightarrow$$

$$\boldsymbol{-x + 2y + 4z - 15 = 0}$$

Ecuación que coincide con la anterior como no podía ser de otra manera.

Conocida ya la ecuación del plano podemos ya hablar de la tercera forma de poner la ecuación de una recta: como intersección de dos planos. Como en el caso anterior, haremos un ejemplo y con ello creemos que es suficiente

RECTA COMO INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS

Como hemos comentado en la lección referida a las ecuaciones de una recta, una vez vista la ecuación del plano podemos dar una tercera forma de definir una recta**. Es la ecuación de la recta dada como intersección de dos planos.**

Si tenemos dos planos, sabemos que su intersección es una recta (salvo que sean paralelos o las dos ecuaciones se refieran a un mismo plano). Por lo tanto, los puntos que satisfacen las dos ecuaciones a la vez son los puntos de una recta. En el ejemplo siguiente vamos a ver cómo, teniendo la recta como intersección de dos planos, podemos calcular su vector y un punto.

Sea la recta r dado como la intersección de los dos planos

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

Lo único que tenemos que hacer es resolver el sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Como vemos, la matriz de los coeficientes ya está triangulada, siendo su rango por lo tanto dos como el rango de la matriz ampliada. El número de incógnitas es tres. Tenemos entonces un sistema compatible indeterminado con un parámetro:

Elegimos como parámetro a la incógnita z. Evidentemente se puede elegir cualquier variable como parámetro siempre que no tenga un valor constante (por ejemplo, si uno de los dos planos está definido por la ecuación $z = 0$, la variable z no podrá ser parámetro claramente pues sólo puede tomar el valor de cero como indica la ecuación). Seguimos con la variable z como parámetro:

$$\boldsymbol{z = \lambda} \rightarrow \begin{cases} 2^{\underline{a}}\ ecuación\text{:}\ \boldsymbol{y} = -2 - z = \boldsymbol{-2 - \lambda} \\ 1^{\underline{a}}\ ecuación\text{:}\ \boldsymbol{x} = 1 - y = 1 - (-2 - \lambda) = \boldsymbol{3 + \lambda} \end{cases}$$

Que, resumiendo, y poniendo las soluciones como las ecuaciones paramétricas de una recta, nos queda:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 3 + \lambda} \\ \boldsymbol{y = -2 - \lambda} \\ \boldsymbol{z = 0 + \lambda} \end{cases}$$

De donde deducimos, comparando con las paramétricas de la recta, que un punto por el que pasa la recta es el $(3, -2,0)$ y un vector que indica su dirección es el vector $\vec{v} = (1, -1,1)$. Ya podemos ponerla si queremos también en forma continua.

Hay que recalcar también que la ecuación de la recta en forma continua son dos ecuaciones por tener dos igualdades. Cada una de esas ecuaciones representan un plano y, por lo tanto, podríamos decir que la ecuación continua de la recta representa a dos planos cuya intersección es la recta.