Problema 1

Se parte de un estado inicial, A, en el que se encuentra helio (gas monoatómico con $c_v = \frac{3}{2}R$) a 10^5 Pa de presión y $300\ K$ de temperatura, siendo su volumen $10^{-2}m^3$. Desde ese estado se llevan a cabo las siguientes transformaciones: a) transformación isoterma reversible al estado B ocupando el doble de volumen; b) transformación isocora reversible hasta el estado C con $T_c = 189\ K$; c) transformación adiabática reversible hasta el estado inicial A. Se pide: A) Determinar el número de moles de gas, representar las transformaciones en un diagrama PV y calcular los valores de la presión, volumen y temperatura en cada uno de ellos. B) Determinar el calor, trabajo y variación de la energía interna en cada fase del proceso, así como el rendimiento del motor térmico al que representa.

Lo primero hacemos un esquema en donde se pongan claramente las distintas transformaciones y **los datos que conocemos** de ellas:

$$A\begin{cases} P_A = 10^5 \\ V_A = 10^{-2} \\ T_A = 300 \end{cases} \xrightarrow{\text{ISOTERMA}} B\begin{cases} P_B \\ V_B = 2\cdot 10^{-2} \\ T_B = 300 \end{cases} \xrightarrow{\text{ISÓCORA}} C\begin{cases} P_C \\ V_C \\ T_C \end{cases} \xrightarrow{\text{ADIABÁTICA}} A\begin{cases} P_A = 10^5 \\ V_A = 10^{-2} \\ T_A = 300 \end{cases}$$

Todas las unidades en el Sistema Internacional

El número de moles de gas los podemos calcular claramente porque en el estado A conocemos las tres variables P, V y T

$$PV = nRT \rightarrow n = \frac{PV}{RT} = \frac{10^5 \cdot 10^{-2}}{8{,}33 \cdot 300} = 0{,}4\ moles$$

A partir de aquí, tenemos que calcular los valores de la presión, volumen y temperatura en los estados B y C.

La transformación isoterma que va del estado A al estado B nos tiene que permitir calcular P_B, ya que V_B es conocido.

De la relación general

$$\frac{P_A V_A}{T_A} = \frac{P_B V_B}{T_A} \rightarrow 10^5 \cdot 10^{-2} = P_B 2 \cdot 10^{-2} \rightarrow \boldsymbol{P_B = \frac{1}{2} 10^5\ Pa}$$

Por lo tanto, ya conocemos las tres variables en el estado B

$$\boldsymbol{V_B = 2 \cdot 10^{-2}\ m^3 \quad P_B = \frac{1}{2} 10^5\ Pa \quad T_B = 300\ K}$$

Estamos en condiciones de calcular las variables en el estado C. Como la transformación es isocora el volumen en el estado C será el mismo que en el estado B, por lo tanto

$$\boldsymbol{V_C = 2 \cdot 10^{-2}\ m^3}$$

La relación entre el estado B y el estado C nos permite decir, utilizando la ley general

$$\frac{P_B V_B}{T_B} = \frac{P_C V_B}{T_C} \rightarrow \frac{\frac{1}{2} 10^5}{300} = \frac{P_c}{T_C} \rightarrow \boldsymbol{\frac{1}{6} 10^3 = \frac{P_c}{T_C}}$$

Una ecuación con dos incógnitas que nos llevan a buscar otra relación entre ellas. Como la relación entre el estado B y el estado C está agotada, buscamos en el proceso adiabático que liga el estado C con el estado A. Sabemos, por tratarse de un proceso adiabático que

$$P_C V_C^\gamma = P_A V_A^\gamma$$

Siendo

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \left| \begin{array}{c} c_v = \frac{3}{2} R \\ c_p - c_v = R \rightarrow c_p = \frac{5}{2} R \end{array} \right| = \frac{\frac{5}{2} R}{\frac{3}{2} R} = \frac{5}{3}$$

Y entonces

$$P_C V_C^\gamma = P_A V_A^\gamma \rightarrow P_C (2 \cdot 10^{-2})^{\frac{5}{3}} = 10^5 (10^{-2})^{\frac{5}{3}} \rightarrow$$

$$P_C = 10^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}} = \mathbf{31.498\ Pa}$$

Valor que nos permite ya calcular también T_C

$$\frac{1}{6}10^3 = \frac{P_c}{T_C} \rightarrow \boldsymbol{T_C} = \frac{6P_C}{10^3} = \frac{6 \cdot 31.498}{10^3} = \mathbf{189\ K}$$

Resumiendo, los valores en C

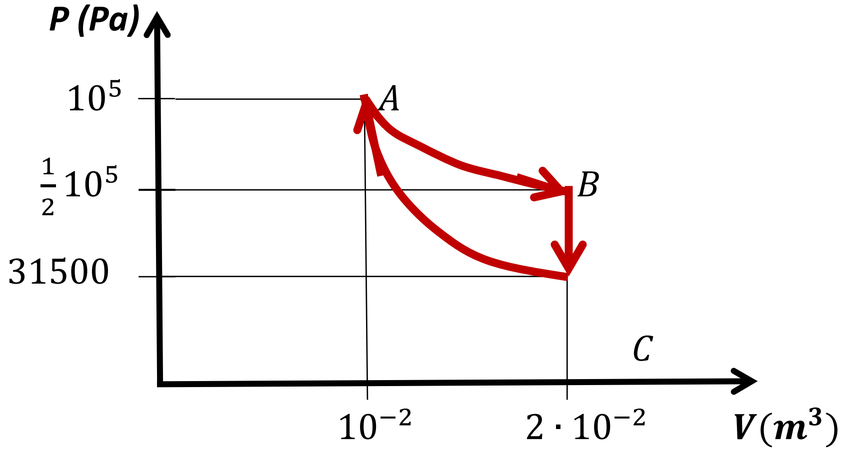
$$\boldsymbol{P_C = 31498\ Pa \quad T_c = 189\ K \quad V_c = 2 \cdot 10^{-2}\ m^3}$$

Por lo que ya podemos dibujar el proceso en el diagrama PV, pues ya conocemos la presión, el volumen y la temperatura en todos los estados del proceso.

$$\boldsymbol{P_A = 10^5 \quad V_A = 10^{-2} \quad T_A = 300}$$

$$\boldsymbol{V_B = 2 \cdot 10^{-2}\ m^3 \quad P_B = \frac{1}{2}10^5\ Pa \quad T_B = 300\ K}$$

$$\boldsymbol{P_C = 31498\ Pa \quad T_c = 189\ K \quad V_c = 2 \cdot 10^{-2}\ m^3}$$



.

Una vez conocidos estos datos, podemos ya calcular los valores de las tres energías $\boldsymbol{Q, W, \Delta U}$.

Proceso AB Isotermo:

$$\Delta U = 0$$

$$Q = W = nRTLn\frac{V_f}{V_0} = 0{,}4 \cdot 8{,}33 \cdot 300 \cdot Ln\frac{2 \cdot 10^{-2}}{10^{-2}} = 692{,}87 \approx 693J$$

Proceso BC Isocoro

$$W = 0$$

$$Q = \Delta U = c_V n\Delta T = \frac{3}{2}8{,}33 \cdot 0{,}4(189 - 300) = -554{,}78 \approx -555J$$

Proceso CA adiabático

$$Q = 0$$

$$\Delta U = c_V n\Delta T = \frac{3}{2}8{,}33 \cdot 0{,}4 \cdot (300 - 189) = 554{,}78 \approx 555\,J$$

$$W = -\Delta U = -554{,}78 \approx -555\,J$$

Y resumiendo en una tabla

Transformación	ΔU	Q	W
AB	0	693	693
BC	-555	-555	0
CA	555	0	-555

Observamos que, por tratarse de un ciclo, la variación de energía interna es cero.

Para hallar el rendimiento recordamos que éste se define como el cociente entre el trabajo realizado y el calor absorbido. Por lo tanto

$$\boldsymbol{\rho = \frac{W}{Q_{absor}} = \frac{693 - 555}{693}}$$