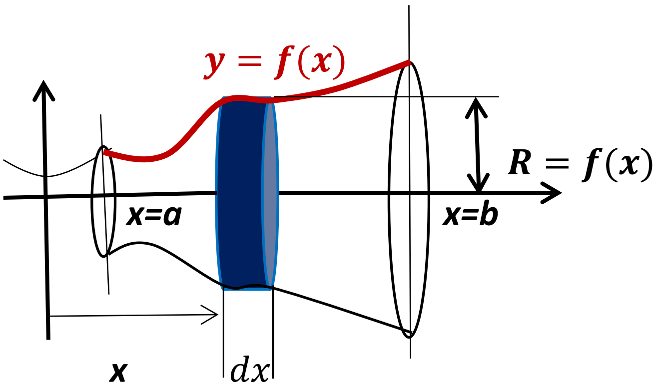
APLICACIÓN DE LA INTEGRAL. CALCULO DE VOLUMENES DE REVOLUCIÓN

Cuando un trozo de curva cualquiera gira alrededor del eje X o del eje Y, se forma un volumen que estamos interesados en calcular. Veamos:

1. GIRO ALREDEDOR DEL EJE X. MÉTODO DE LOS DISCOS

Sea la curva $y = f(x)$ de la figura y queremos calcular el volumen del cuerpo que se forma al girar alrededor del eje X el trozo de ella que va entre x=a y x=b (marcado en rojo)



Como vemos, el cuerpo no es un prisma recto en el que podamos aplicar las leyes de la geometría básica. Lo que vamos a hacer es partir el cuerpo en "ronchitas" muy finas (EN AZUL) que, por ser tan finas, podemos aproximar al volumen de un disco (o cilindro muy fino) y después sumar todos esos "volumencitos" por medio de la integral.

Empezamos cogiendo una "ronchita" o disco genérico definido por la variable x y calculamos su volumen, que será un diferencial pues su altura también lo es ***(dx).***

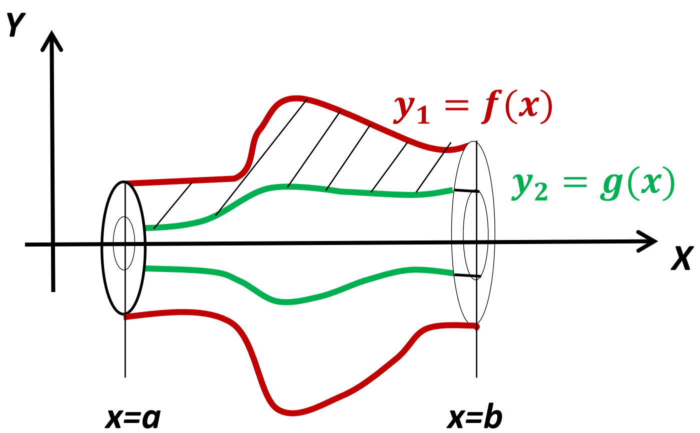
Como observamos en la figura, el disco tiene de altura dx y de radio $R = f(x)$, por lo tanto, su volumen será:

$$V_{cilindro} = \pi R^2 h \rightarrow \boldsymbol{dV = \pi f^2(x) dx} \rightarrow$$

Como ya tenemos la expresión diferencial del volumen en función de la variable, aplicamos la "definición" dada en la lección anterior

$$\boldsymbol{V = \int_{x=a}^{x=b} \pi f^2(x)dx}$$

También podemos calcular el volumen del "toroide" formado por dos funciones al girar en torno al eje X, o lo que es lo mismo, el volumen generado por el área rayada al girar en torno al eje X



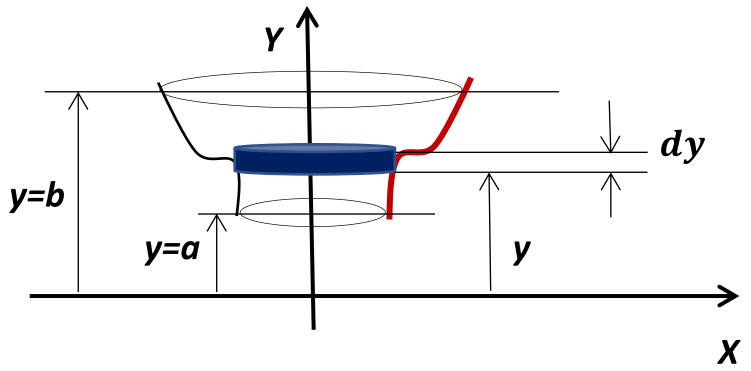
Creemos que es fácil ver que el volumen solicitado se calcula quitándole al volumen generado por la curva superior al girar en torno al eje X el volumen generado por la curva inferior al girar en torno al mismo eje. O lo que es lo mismo, al volumen generado por la "rama" exterior le quitamos el volumen generado por la "rama" interior:

$$V = \int_{x=a}^{x=b} \pi f^2(x)dx - \int_{x=a}^{x=b} \pi g^2(x)dx =$$

$$\boldsymbol{V = \int_{x=a}^{x=b} \pi\left[f_{exterior}^2(x) - g_{interior}^2(x)\right]dx}$$

2. GIRO ALREDEDOR EJE Y. MÉTODO DE DISCOS

Se demuestra de la misma manera que en el apartado anterior:



Como antes, partimos el cuerpo en multitud de disquitos de grosor muy fino dy, y definidos por la altura a la que están, por la variable y. El radio es el valor de ***"x"*** que le corresponde a esa ***"y":***

$$Como\ y = f(x) \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{f^{-1}(y)} = \boldsymbol{R}$$

$$dV = \pi R^2 h = \pi(f^{-1}(y))^2 dy \rightarrow \boldsymbol{V} = \int_{\boldsymbol{y=a}}^{\boldsymbol{y=b}} \boldsymbol{\pi(f^{-1}(y)^2 dy}$$

En el caso de que gire el área limitada por dos "ramas", una exterior o más alejada del eje, y otra interior o más cercana al eje, la ley es la misma que en el caso del eje X:

$$\boldsymbol{V} = \int_{\boldsymbol{y=a}}^{\boldsymbol{y=b}} \boldsymbol{\pi\left\{\left[f_{exterior}^{-1}(y)\right]^2 - \left[g_{interior}^{-1}(y)\right]^2\right\} dy}$$

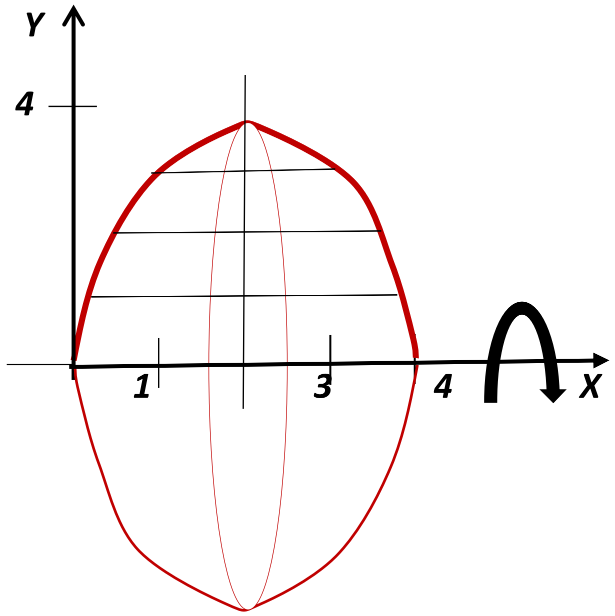
Veamos esto con algunos ejemplos.

Ejemplo 1.

El área limitada por la curva $y = x(4-x)$ y el eje X gira alrededor del eje X. Calcular el volumen del cuerpo engendrado.

Esbozo:

$$\boldsymbol{y = x(4-x) \rightarrow cortes \begin{cases} eje\ X: x = 0, x = 4 \\ eje\ Y: y = 0 \end{cases}}$$



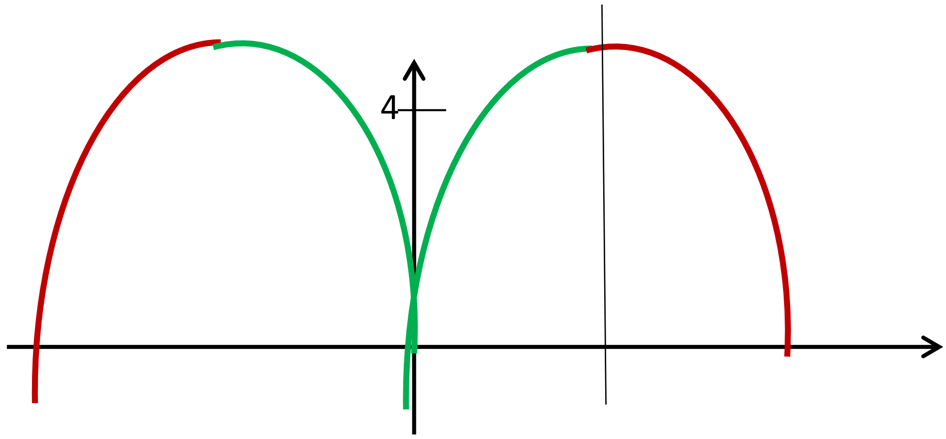
Como vemos en la figura, encima del eje X sólo hay una rama que, al girar, produce el cuerpo de revolución dibujado. Por lo tanto, aplicando la fórmula de giro alrededor eje X de una sola rama:

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)dx = \int_0^4 \pi[x(4-x)]^2 dx$$

Integral, que, una vez desarrollado el cuadrado, se transforma en una polinómica sencilla.

Ejemplo 3.

La misma área (rayada) del ejemplo anterior gira alrededor del eje Y. Calcular el volumen del cuerpo engendrado.



Como vemos en la figura, el área que gira respecto al eje Y tiene DOS ramas, una más cercana al eje ***Y*** (la mitad de la parábola izquierda en verde) y otra más alejada (la mitad derecha de la parábola en rojo y más alejada del eje Y). Además, estas dos ramas nos van a aparecer analíticamente al despejar la variable "x" en función de "y" para aplicar la fórmula de volumen de revolución alrededor eje Y

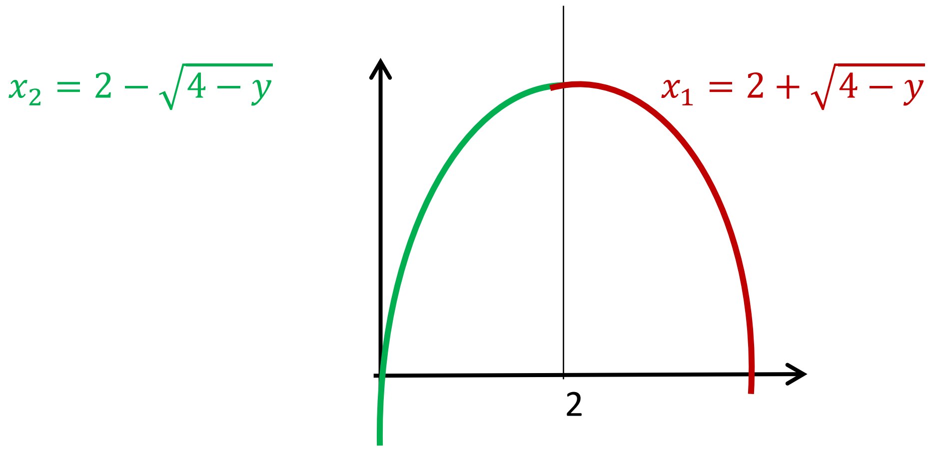
$$\boldsymbol{V = \int_{y=a}^{y=b} \pi \left\{ \left[f_{exterior}^{-1}(y) \right]^2 - \left[g_{interior}^{-1}(y) \right]^2 \right\} dy}$$

Despejemos entonces la variable "x":

$$y = x(4 - x) \rightarrow -x^2 + 4x - y = 0 \rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(-1)(-y)}}{-2} \rightarrow$$

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{16 - 4y}}{-2} = 2 + \sqrt{4 - y}$$

$$x_2 = \frac{-4 + \sqrt{16 - 4y}}{-2} = 2 - \sqrt{4 - y}$$



Y entonces vemos claramente las dos ramas, la exterior o más alejada del eje (que hemos llamado x_1) y la interior, o más cercana al eje (que hemos llamado x_2). Entonces:

$$\boldsymbol{V = \int_{y=a}^{y=b} \pi \left\{ \left[f^{-1}_{exterior}(y) \right]^2 - \left[g^{-1}_{interior}(y) \right]^2 \right\} dy}$$

$$V = \int_{y=0}^{y=4} \pi \left[(2+\sqrt{4-y})^2 - (2-\sqrt{4-y})^2 \right] dy =$$

Arreglar siempre el integrando:

$$V = \pi \int_0^4 \left[\left(4+4-y+4\sqrt{4-y}\right) - \left(4+4-y-4\sqrt{4-y}\right) \right] dy$$

$$= \pi \int_0^4 8\sqrt{4-y}dy = 8\pi \int_0^4 \sqrt{4-y}dy$$

Integral muy sencilla que se resuelve según los métodos de integración vistos.

4-y=t, primer cambio de variable del manual de métodos de integración.

En la siguiente lección vemos otro método para calcular volúmenes, el método de los tubos