victor loza
ACADEMIA ONLINE

SISTEMAS DE ECUACIONES. TIPOS. TEOREMA ROCHE-FROBENIUS

Recomendamos, más bien creemos que es necesario, estudiar primero el capítulo de matrices, sobre todo en cuanto al rango de una matriz se refiere.

Hemos preferido hacer ejemplos para llegar nosotros mismos a deducir el teorema de Roche-Frobenius y no al revés. Pensamos que así se entienden mucho mejor las cosas. Por el contrario, la lección va a ser más larga. Así que un poco de paciencia.

Si tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas pueden pasar varias cosas:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 4x + 8y = 4 \end{cases}$$

A simple vista vemos que la segunda ecuación NO ES TAL porque va a dar las mismas soluciones que la primera pues podemos ver fácilmente que proviene de ella multiplicándola por dos. Si dibujamos ambas rectas vemos que realmente es la misma recta y, como decíamos, las parejas solución son las mismas. Claramente **la segunda ecuación SOBRA y el sistema anterior NO es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, es equivalente al sistema**

$$2x + 4y = 2$$

(Más adelante diremos que el ***rango*** **de este sistema de ecuaciones es** ***uno*** y no dos como parecía)

Por lo tanto, **ES IMPORTANTE SABER SI VARIAS PAREJAS, O TERNAS…** (n-tuplas se dice cuando hay n números) o vectores en general, **SON LIBRES Y NINGUNA DE ELLAS SE PUEDE OBTENER COMO SUMAS DE LAS DEMÁS MULTIPLICADAS POR NÚMEROS**.

El método que nos va a permitir averiguar cuántas filas libres tenemos cuando nos dan un conjunto de ternas (se haría lo mismo con parejas, cuaternas…insistimos) **es el cálculo del rango de la matriz formada por las filas que componen el sistema.** Esto, como hemos pretendido explicar, es muy importante cuando tenemos un sistema de ecuaciones. No es lo mismo tener dos ecuaciones con dos incógnitas, como parecía en el ejemplo, que una ecuación con dos incógnitas, que era lo que realmente teníamos.

En el método, las ecuaciones las vamos a poner una debajo de otra formando una matriz. Con unos ejemplos creemos que se entiende suficientemente. Veamos.

Ejemplo 1

Imaginemos que tenemos el sistema

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+3z=4 \\ 2x-y+4z=5 \end{cases}$$

Para ver si hay alguna fila "camuflada" de verdadera ecuación pero que realmente proviene de las demás y por lo tanto no nos interesa, las ponemos a las tres como decíamos una debajo de otra, pero sin las letras de las incógnitas (ya sabemos lo que significa y ahorramos tiempo). Obsérvese que la última columna está formada por los términos independientes del sistema, los dibujamos un poco apartados y separados con una línea vertical, aunque esta línea vertical la suprimiremos muchas veces porque tendremos siempre en mente que son eso, los términos independientes.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

La matriz A de los coeficientes de las incógnitas, sin los términos independientes se denomina matriz de los coeficientes. En este caso es una matriz ***3x3***.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

La matriz "entera", con los términos independientes incluidos, matriz B, se denomina matriz ampliada. En este caso es una matriz ***3x4***.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Tenemos en cuenta que los nombres de ambas matrices, ***A y B*** en nuestro caso, pueden ser otros en otros textos.

Con la matriz "entera", la matriz ampliada ***B***, utilizamos el método de Gauss o de triangulación que hemos visto en la lección dedicada al rango de una matriz. Recordamos que consiste en hacer ceros debajo de la diagonal principal (en rojo) y para ello hay que seguir un orden.

Paso primero

Con el primer elemento de la diagonal principal de la primera fila hacemos ceros los elementos que están debajo suyo sumando o restando filas multiplicadas por números. Nosotros siempre vamos a sumar, multiplicaremos por números negativos cuando queramos restar dos filas. Esto se puede hacer de muchas maneras. Nosotros vamos a multiplicar a la primera fila por (-1) y se la vamos a sumar a la segunda fila, con lo que el UNO primero de la segunda fila desaparece:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Así nos quedaría "mentalmente" la primera fila. Decimos mentalmente porque lo que realmente escribiremos es la siguiente matriz, con la primera fila como está en la de la matriz inicial, aquí se hace para que se entienda mejor.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

Seguimos en el primer paso. Ahora, con el mismo "uno" de la primera fila, hacemos cero el "dos" de la tercera fila que está debajo de él.

Para ello multiplicamos a la primera fila por (-2) y se la sumamos a la tercera

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Que sumándosela a la tercera fila queda (con la primera fila como estaba al principio, insistimos)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

En este caso ya vemos que la tercera fila es una ecuación “camuflada” de la que podíamos ya prescindir. Pero vamos a seguir como si no nos hubiéramos dado cuenta porque en otras ocasiones no se verá tan claro.

Paso segundo

Una vez hechos ceros todos los elementos que están debajo del primer elemento de la diagonal principal, **hacemos lo mismo con el segundo elemento de la diagonal principal, el -3 señalado en rojo**, **y conseguimos un cero debajo de él.** Como los dos números son iguales, basta restarle a la tercera fila la segunda y ya tenemos el cero en la tercera fila. Escribimos, por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde observamos que también se han transformado en cero todos los elementos de la tercera fila o supuesta ecuación. Realmente, el sistema que tenemos es de dos ecuaciones con dos incógnitas representado por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Visto cómo podemos averiguar cuántas ecuaciones tenemos realmente, vamos a ver los distintos tipos de ecuaciones que se nos pueden presentar.

CASO PRIMERO. SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

Sea el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Empezamos a "hacer ceros" con el orden que hemos dicho. Si a la primera fila la multiplicamos por (-2) y se la sumamos a la segunda nos queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Ahora, a la tercera fila le restamos la primera y conseguimos el cero del primer elemento de la tercera fila:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ya hemos acabado con el primer elemento de la diagonal principal pues ya tenemos todo ceros debajo de ella.

Entramos en el segundo paso para hacer ceros debajo del segundo elemento de la diagonal principal, el "diez" rojo segundo elemento de la segunda fila. **Para que aparezcan los mismos números, pero opuestos, multiplicamos a la segunda fila por *-3* y a la tercera por *10*** (este nos parece un método sencillo cuando los números son primos entre sí, como 10 y 3 en nuestro caso)

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & -30 & -12 & -18 \\ 0 & 30 & 20 & 40 \end{pmatrix} \to$$

Y sumando a la tercerea fila la segunda

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & & 1 \\ 0 & 10 & 4 & & 6 \\ 0 & 0 & 8 & & 22 \end{pmatrix}$$

Vemos que **ya tenemos todo ceros debajo de la diagonal principal**. **Como hay tres filas distintas de cero, el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada es tres.** Tenemos entonces realmente tres ecuaciones. De la última

$$8z = 22 \rightarrow \boldsymbol{z} = \frac{22}{8} = \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{4}}$$

Y llevando este valor de ***"z"*** a la segunda ecuación calculamos la incógnita ***"y"*** y llevando ya los valores de estas variables ya conocidas a la primera ecuación despejamos la incógnita ***"x"***:

Segunda ecuación:

$$10y + 4z = 6 \rightarrow 10y + 4\frac{11}{4} = 6 \rightarrow 10y = -5 \rightarrow \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}$$

Primera ecuación:

$$x - 4y + z = 1 \rightarrow x - 4\frac{-1}{2} + \frac{11}{4} = 1 \rightarrow \boldsymbol{x} = -\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{4}}$$

Este sistema tiene por lo tanto solución, se dirá entonces compatible, y como además es única diremos por ello que es determinado.

Si nos fijamos en la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Observamos que su rango es tres.

Por su parte, la matriz B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

Tiene rango tres, que además coincide con el rango de la matriz de los coeficientes y con el número de incógnitas. Creemos por lo tanto bastante intuitiva la siguiente regla que es parte del teorema fundamental de los sistemas de ecuaciones que resumiremos al final:

Si el rango de la matriz de los coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada y también con el número de incógnitas el sistema tendrá una única solución y se llamará SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO S.C.D.

CASO SEGUNDO. SISTEMA INCOMPATIBLE.

Sea el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 6 & -2 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

Multiplicando a la primera por (-2) y sumándosela a la segunda fila:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 4 \\ 6 & -2 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

Y ahora multiplicando a la primera por (-6) y sumándosela a la tercera fila

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & -8 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Ya hemos acabado con el primer elemento de la diagonal principal. Con el (-4) de la segunda fila de la diagonal principal hacemos cero el -8 que está debajo suyo, multiplicando a la segunda por (-2) y sumándosela a la tercera nos queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & -8 & 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & -4 & -8 \\ 0 & -8 & 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Lo primero que observamos es **que la última ecuación NO tiene solución:**

$$\mathbf{0 \cdot z = -8 \rightarrow \nexists z}$$

Y por lo tanto el sistema ya no tiene solución, lo llamamos por ello **INCOMPATIBLE**.

A la vista de lo que nos ha quedado en la última matriz, podemos decir que el rango de la matriz de los coeficientes es dos, sólo tiene dos filas distintas de cero, como se observa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, el rango de la matriz ampliada es tres

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Esto nos da pie a la segunda regla fundamental del teorema de los sistemas de ecuaciones:

Si el rango de la matriz de los coeficientes es distinto que el rango de la matriz ampliada el sistema NO tiene solución y se llama SISTEMA INCOMPATIBLE S.I.

(las tres ecuaciones no se pueden cumplir a la vez, son incompatibles)

CASO TERCERO. SISTEMAS COMPATIBLES INDETERMINADOS.

Tengamos el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 6 & 10 & 14 & 18 \end{pmatrix}$$

Operando como siempre, hacemos ceros debajo del "uno" primero de la diagonal principal, multiplicando primero por (-2) para hacer cero en la segunda fila y después por (-6) para hacer cero debajo suyo en la tercera fila. Nos queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Y ahora, como segundo paso, hacemos cero debajo del "dos" rojo de la diagonal principal de la segunda fila, multiplicando a la segunda por (-2) y sumándosela a la tercera fila

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y dado que la última fila es TODA de ceros la podemos quitar y el sistema es equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Nos damos cuenta de que tenemos dos ecuaciones, pero tres incógnitas. PODEMOS RAZONAR QUE, SI CONOCIÉRAMOS UNA DE ELLAS, POR EJEMPLO, EL VALOR DE *"z"* , PODRÍAMOS DESPEJAR EL VALOR DE LAS OTRAS DOS EN FUNCIÓN DE ELLA. Y eso es lo que vamos a hacer, **le vamos a asignar a la incógnita *"z"* un valor cualquiera representado por el número λ** y vamos a despejar las otras dos en función de ese valor. El sistema tiene por lo tanto muchas soluciones y se llama **COMPATIBLE (por**

tener solución) e **INDETERMINADO (por tener muchas).** Sustituyendo este valor de $\boldsymbol{z}$ en las dos ecuaciones, despejamos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ en función del parámetro:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=1} \\ \boldsymbol{2y+4z=6} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{z=\lambda}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x+y+\lambda=1} \rightarrow x=1-y-\lambda \rightarrow \boldsymbol{x}=1-(3-2\lambda)-\lambda=\boldsymbol{-2+\lambda} \\ \boldsymbol{2y+4\lambda=6} \rightarrow 2y=6-4\lambda \rightarrow \boldsymbol{y=3-2\lambda} \end{cases}$$

Que resumiendo:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=-2+\lambda} \\ \boldsymbol{y=3-2\lambda} \\ \boldsymbol{z=\lambda} \end{cases}$$

Y dando valores al parámetro λ vamos obteniendo las infinitas ternas de números solución del sistema.

Si observamos la última matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Vemos que el rango de la matriz de los coeficientes es dos e igual al rango de la matriz ampliada, pero es MENOR que el número de incógnitas, lo que nos da pie para la tercera regla del teorema de los sistemas de ecuaciones:

Si el rango de las dos matrices es igual pero menor al número de incógnitas el sistema será COMPATIBLE INDETERMINADO SCI

Resumiendo, las tres reglas del teorema, diremos:

Teorema Roche-Frobenius

$$\begin{cases} \boldsymbol{rangA = rangB} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{= \text{número incógnitas} \rightarrow S.C.D} \\ \boldsymbol{< \text{número incógnitas} \rightarrow S.C.I} \end{cases} \\ \boldsymbol{rangA \neq rangB \rightarrow S.I} \end{cases}$$