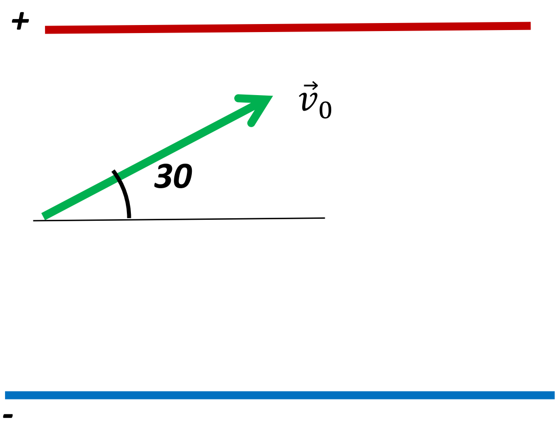
victor loza
ACADEMIA ONLINE

PROBLEMAS RESUELTOS ELECTRICIDAD ESTATICA

Con estos problemas pretendemos hacer ver que si aplicamos las pautas comentadas y somos rigurosos con los cálculos los, aparentemente complicados problemas de electrostática, no lo son tanto.

Ejemplo 1

Una carga $q = +1C$ y masa $m = 2Kg$ es acelerada bajo una diferencia de potencial de 1000 V y entra con la velocidad adquirida y equidistante de las placas dentro de un condensador de placas separadas 60 cm y que están a una diferencia de potencial de 680 voltios. Las placas tienen una longitud de 1 m y la velocidad de entrada de la carga forma 30 grados con el eje OX tal como indica la figura. Hallar la altura máxima que la carga adquiere entre las placas y su velocidad al salir de ellas.



Lo primero, vamos a calcular el módulo de la velocidad de entrada después de haber sido acelerado. Recordamos que cuando una carga se acelera entre dos puntos de diferencia de potencial ΔV el incremento de su energía cinética viene dado por

$$\Delta \boldsymbol{E_c} = |\boldsymbol{q}\Delta \boldsymbol{V}|$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = |q\Delta V| \rightarrow \frac{1}{2}2v_f^2 - 0 = 1 \cdot 1000$$

$$\rightarrow \boldsymbol{v_f = 10\sqrt{10}\frac{m}{s}}$$

Una vez dentro, la carga está inmersa en un campo eléctrico vertical y hacia abajo (por cómo están cargadas las placas, la positiva arriba) que le va a producir una aceleración también hacia abajo (la carga es positiva), que queremos calcular. A partir de ahí el problema será de cinemática.

Campo dentro de las placas del condensador:

$$\boldsymbol{\Delta V = Ed} \rightarrow 680 = E60 \cdot 10^{-2} \rightarrow E = \frac{3400}{3}\frac{N}{C} \rightarrow \vec{E} = -\frac{3400}{3}\vec{j}$$

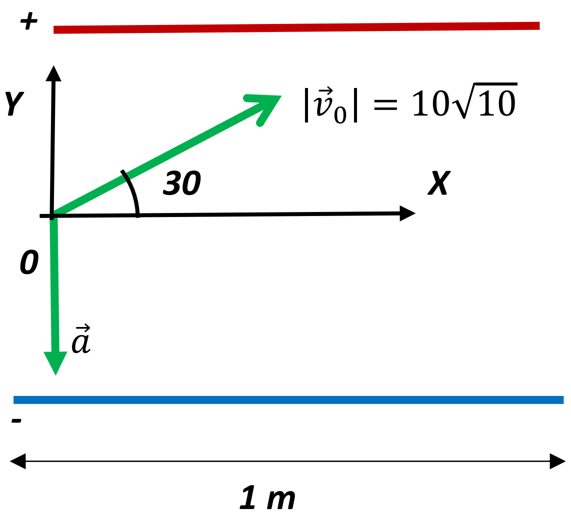
Por lo tanto, la fuerza sobre nuestra carga es:

$$\boldsymbol{\vec{F} = q \cdot \vec{E}} \rightarrow \vec{F} = +1 \cdot \left(-\frac{3400}{3}\vec{j}\right)$$

Y su aceleración:

$$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow -\frac{3400}{3}\vec{j} = 2 \cdot \vec{a} \rightarrow \vec{a} = -\frac{1700}{3}\vec{j}\, {}^{m}/_{s^2}$$

Con estos datos, el problema cinemático y de aceleración constante:



Debemos de recordar de las lecciones de cinemática de esta página, cualquier movimiento de aceleración constante tiene un vector de posición que viene dado por:

$$\boldsymbol{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2}$$

En nuestro caso, conocemos perfectamente la velocidad inicial, $\vec{v}_0$ pues sabemos su módulo y el ángulo que forma con la horizontal. También conocemos el vector aceleración. La posición inicial es el origen de coordenadas. Por lo tanto:

$$\overrightarrow{v_0} = 10\sqrt{10}cos30\vec{\imath} + 10\sqrt{10}sen30\vec{\jmath} = 5\sqrt{30}\vec{\imath} + 5\sqrt{10}\vec{\jmath}$$

$$\vec{a} = \frac{1700}{3}(-\vec{\jmath}) = -\frac{1700}{3}\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{r_0} = 0$$

Sustituyendo en la ley del vector de posición:

$$\vec{r} = \left(5\sqrt{30}\vec{\imath} + 5\sqrt{10}\vec{\jmath}\right)t + \frac{1}{2}(-\frac{1700}{3}\vec{\jmath})t^2$$

Y agrupando componentes:

$$\boldsymbol{\vec{r} = 5\sqrt{30} \cdot t\vec{\imath} + (5\sqrt{10} \cdot t - \frac{1700}{6}t^2)\vec{\jmath}}$$

De donde:

$$\boldsymbol{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 5\sqrt{30}\vec{\imath} + \left(5\sqrt{10} - \frac{1700}{3}t\right)\vec{\jmath}}$$

Ya conocemos perfectamente el movimiento con estas dos leyes. Vamos a calcular la altura máxima y eso, como sabemos, es cuando la velocidad es sólo horizontal (en el punto más alto no hay componente vertical de la velocidad). Por lo tanto:

$$v_y = 0 \rightarrow 5\sqrt{10} - \frac{1700}{3}t = 0 \rightarrow t = \frac{15\sqrt{10}}{1700} = \frac{3\sqrt{10}}{340}s$$

Veamos ahora la posición en este tiempo:

$$\vec{r}\left(\frac{3\sqrt{10}}{340}\right) = 5\sqrt{30}\frac{3\sqrt{10}}{340}\,\vec{\imath} + \left(5\frac{3\sqrt{10}}{340}\sqrt{10} - \frac{1700}{6}\left(\frac{3\sqrt{10}}{340}\right)^2\right)\vec{\jmath}$$

$$\vec{r} = \frac{15\sqrt{3}}{34}\vec{\imath} + \left(\frac{15}{34} - \frac{15}{68}\right)\vec{\jmath} \approx \mathbf{0,76\,\vec{\imath} + 0,22\vec{\jmath}}$$

Por lo que el vértice de la parábola se alcanza dentro del condensador puesto que la coordenada horizontal de la posición en la altura máxima es menor que un metro que es la largura del condensador.

Veamos ahora la velocidad de salida:

Para calcular alguna característica concreta del movimiento (en nuestro caso la velocidad de salida) tenemos que saber traducir al lenguaje matemático de la trayectoria "alguna" propiedad que defina al punto que queremos estudiar y calcular con ella **el tiempo en que eso ocurre** (conocido el tiempo, conocemos todo pues es la variable fundamental). Suele ser sencillo, en nuestro caso creemos que se ve fácil que la "x" del punto de salida es un metro

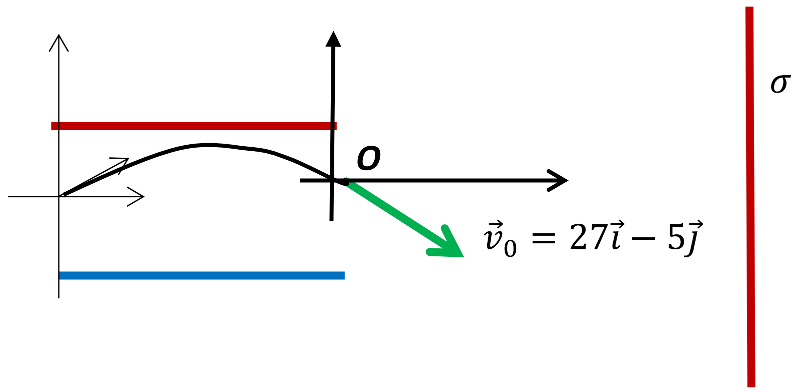
$$x = \mathbf{5\sqrt{30}\cdot t = 1} \rightarrow t = \frac{1}{5\sqrt{30}}s \rightarrow$$

$$\vec{\boldsymbol{v}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5\sqrt{30}}}\right) = 5\sqrt{30}\vec{\imath} + \left(5\sqrt{10} - \frac{1700}{3}\frac{1}{5\sqrt{30}}\right)\vec{\jmath} \approx \mathbf{27\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}}$$

Ejemplo 2

Un plano indefinido y vertical de densidad $\sigma \frac{C}{m^2}$ está a $2m$ de la salida del condensador. Calcular dicha densidad sabiendo que es la mínima para que no choque la carga con el plano.

Representando lo que sabemos hasta ahora:



Para el estudio del movimiento fuera del condensador elegimos otro origen de coordenadas ***O*** y así $\vec{r}_0 = 0$ en la ley fundamental del movimiento de aceleración constante, como va a ser en nuestro caso según vemos:

Campo creado por la placa, según recordamos de la teoría, es:

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \rightarrow \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon}\vec{\imath}$$

La fuerza sobre la partícula es entonces:

$$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a} \rightarrow \boldsymbol{\vec{a}} = \frac{q}{m}\vec{E} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon}\vec{\imath}\right) = -\boldsymbol{\frac{\sigma}{4\varepsilon}\vec{\imath}}$$

Ya tenemos entonces las tres características esenciales del movimiento.

$$\boldsymbol{\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}_0 t+\frac{1}{2}\vec{a}t^2} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\vec{r}_0=\vec{0}} \\ \boldsymbol{\vec{v}_0=27\vec{\imath}-5\vec{\jmath}} \\ \boldsymbol{\vec{a}=-\frac{\sigma}{4\varepsilon}\vec{\imath}} \end{cases}$$

Como vemos, hemos trabajado con la incógnita σ, tranquilamente, y lo vamos a seguir haciendo hasta que al final, imponiendo la condición del problema (la carga no choca con la placa), calculemos su valor y solucionemos el problema (técnica general, creemos, para resolver muchos problemas). Sustituyendo en la ley general los valores de $\vec{r}_0, \vec{v}_0\ y\ \vec{a}$ nos queda:

$$\vec{r}=(27\vec{\imath}-5\vec{\jmath})t+\frac{1}{2}\left(-\frac{\sigma}{4\varepsilon}\vec{\imath}\right)t^2 \rightarrow \vec{r}=\left(27t-\frac{\sigma}{8\varepsilon}t^2\right)\vec{\imath}-5t\vec{\jmath}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=27t-\frac{\sigma}{8\varepsilon}t^2} \\ \boldsymbol{y=-5t} \end{cases}$$

Y el vector velocidad:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\left(27-\frac{\sigma}{4\varepsilon}t\right)\vec{\imath}-5\vec{\jmath}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{v_x=27-\frac{\sigma}{4\varepsilon}t} \\ \boldsymbol{v_y=-5} \end{cases}$$

Ecuaciones que nos permiten conocer el movimiento perfectamente. La condición que nos permite resolver el problema nos la están diciendo en el enunciado: cuando la carga llega a la placa, como no queremos que choque con ella eso significa que en ese momento la velocidad es sólo vertical, o sea, **en ese momento $\boldsymbol{v_x=0}$, cuando $\boldsymbol{x=2}$**

Vamos a las ecuaciones de ***"x"*** y $\boldsymbol{v_x}$ e imponemos esas condiciones:

$$x=2 \rightarrow \boldsymbol{27t-\frac{\sigma}{8\varepsilon}t^2=2}$$

$$v_x=0 \rightarrow \boldsymbol{27-\frac{\sigma}{4\varepsilon}t=0}$$

Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en t y σ que, como decíamos, resuelven el problema.

La trayectoria de la carga será