INTEGRALES RACIONALES CON RAICES IMAGINARÍAS MÚLTIPLES

En estos apuntes sobre integrales de nivel universitario partimos de las que ya se han visto en cálculo de 2º de bachiller. Recomendamos por lo tanto repasar estas antes de continuar.

El método de Hermite-Ostrogadsky se utiliza cuando las raíces del denominador son complejas múltiples. En el primer ejemplo partimos de la siguiente igualdad, aunque después veremos que el denominador se puede complicar más.

$$\int \frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^n}dx = \frac{R(x)}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \int \frac{Ax+b}{ax^2+bx+c}dx$$

Donde **los dos numeradores de las fracciones de la derecha son polinomios de un grado menor a los polinomios del denominador y hay que calcular sus coeficientes.**

Con dos ejemplos creemos que el procedimiento queda claro. En este caso el denominador va a ser un polinomio con raíces imaginarias de multiplicidad dos.

Ejemplo 1

$$\int \frac{x+2}{(2x^2+x+1)^2}dx$$

Aplicamos la fórmula:

$$\int \frac{x+2}{(2x^2+x+1)^2}dx = \frac{Ax+B}{2x^2+x+1} + \int \frac{Cx+D}{2x^2+x+1}dx$$

Donde simplemente hemos aplicado la fórmula inicial. Para calcular las cuatro constantes, ***A, B, C y D*** **derivamos la expresión anterior:**

$$\frac{x+2}{(2x^2+x+1)^2}=\frac{A(2x^2+x+1)-(Ax+B)(4x+1)}{(2x^2+x+1)^2}+\frac{Cx+D}{2x^2+x+1}$$

Hemos tenido en cuenta que la derivada de la integral es el integrando. Ahora, como en los casos anteriores de integrales racionales, vamos a operar la suma de la derecha.

$$\frac{x+2}{(2x^2+x+1)^2}=\frac{A(2x^2+x+1)-(Ax+B)(4x+1)+(Cx+D)(2x^2+x+1)}{(2x^2+x+1)^2}$$

Y, exactamente igual que en los casos anteriores, igualamos los numeradores puesto que, como vemos, los denominadores son iguales.

$$x+2=A(2x^2+x+1)-(Ax+B)(4x+1)+(Cx+D)(2x^2+x+1)$$

Para calcular las constantes damos valores a ***x*** puesto que es una identidad que se cumple para cualquier valor de ***x***

$$\begin{cases} x=0\rightarrow \mathbf{2}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D} \\ x=1\rightarrow \mathbf{3}=\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{4}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\mathbf{5}+(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})\cdot\mathbf{4} \\ x=-1\rightarrow \mathbf{1}=\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{2}-(-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(-\mathbf{3})+(-\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})\cdot\mathbf{2} \\ x=2\rightarrow \mathbf{4}=\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{11}-(\mathbf{2}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\mathbf{9}+(\mathbf{2}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})\cdot\mathbf{11} \end{cases}$$

Las cuatro ecuaciones remarcadas en negro constituyen un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Este es el paso más largo de este método, pero merece la pena porque sino no podemos resolver la integrar racional con raíces imaginarias múltiples en el denominador. Una vez calculadas las constantes ***A, B, C y D*** (algo que suponemos sabemos hacer, sino es el caso consultar la resolución de sistemas de ecuaciones en los archivos de algebra de 2º de bachiller) lo único que nos queda es resolver la integral de la derecha. **Es una integral cuyo grado del numerador es menor que el grado del denominador con raíces imaginarias simples y corresponde, por lo tanto, a las integrales tipo *2c* de los apuntes de integrales de 2º de bachiller.** De todas formas, la recordamos aquí. Suponiendo que ***C y D*** valen ***1*** (estos valores no tienen mayor importancia, podrían ser distintos y la resolución exactamente la misma) tenemos:

$$\int \frac{x+1}{2x^2+x+1}dx = |2x^2+x+1 = 2(x+a)^2+b|$$

Como vemos, lo primero que hacemos es transformar el polinomio complejo en un monomio al cuadrado más un número, lo que se llama “completar cuadrados”. Recalcamos que al ser el coeficiente de la ***x* cuadrado un dos, hemos de poner ese dos delante del monomio elevado al cuadrado.** Para calcular las constantes ***a y b*** procedemos operando la parte derecha de la igualdad e igualando los coeficientes de las “equis” del mismo grado:

$$\boldsymbol{2x^2+x+1} = 2(x+a)^2+b = \boldsymbol{2x^2+4ax+2a^2+b}$$

La igualdad de las ***x al cuadrado está asegurada.*** Igualando, como hemos dicho, los coeficientes de las ***x*** del mismo grado y los términos independientes tenemos:

$$\begin{cases} x: 1 = 4a \rightarrow a = \dfrac{1}{4} \\ T.indp.: 1 = 2a^2+b \rightarrow 1 = \dfrac{2}{16}+b \rightarrow b = \dfrac{7}{8} \end{cases}$$

La integral nos queda:

$$\int \frac{x+1}{2x^2+x+1}dx = \int \frac{x+1}{2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}}dx = \left| \begin{matrix} \boldsymbol{x+\frac{1}{2} = t \rightarrow dx = dt} \\ \boldsymbol{x = t-\frac{1}{2}} \end{matrix} \right| =$$

$$\int \frac{t-\frac{1}{2}+1}{2t^2+\frac{7}{8}}dt = \int \frac{t+\frac{1}{2}}{2t^2+\frac{7}{8}}dt = \int \frac{t}{2t^2+\frac{7}{8}}dt + \int \frac{\frac{1}{2}}{2t^2+\frac{7}{8}}dt$$

Hacemos cada una por separado, las dos son casi inmediatas, pero necesitan unos “arreglos”.

La primera es por cambio de variable, ya que en el denominador hay una función cuya derivada en su parte funcional está en el numerador multiplicando al diferencial. Sin embargo, aunque no seamos amigos de “recetas” que realmente no son necesarias, en este caso sí vamos a aplicar la siguiente, pues este tipo de integral aparece muchas veces:

Recordamos la siguiente igualdad, que proviene simplemente de que sabemos derivar

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = Ln|f(x)| + C$$

Dado que en nuestro caso la derivada del denominador es ***4t,*** multiplicamos al numerador por ***4*** y, para que la igualdad sea cierta, dividimos delante de la integral entre ***4***

$$\int \frac{t}{2t^2 + \frac{7}{8}}dt = \frac{1}{4}\int \frac{4t}{2t^2 + \frac{7}{8}}dt = \frac{1}{4}Ln\left|2t^2 + \frac{7}{8}\right|$$

La segunda es inmediata, un arco tangente, cuando arreglemos el integrando, pues sabemos que:

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}$$

Entonces:

$$\int \frac{\frac{1}{2}}{2t^2 + \frac{7}{8}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{2\left(t^2 + \frac{7}{16}\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{7}{16}} = \left|\begin{matrix} a^2 = \frac{7}{16} \rightarrow \\ \rightarrow a = \frac{\sqrt{7}}{4} \end{matrix}\right|$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{4}}arctg\frac{t}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{7}}arctg\frac{4t}{\sqrt{7}}$$

Ejemplo 2

$$\int \frac{2x+1}{(x-2)^2(x^2+4)^2}dx$$

Lo primero, como en todas, separamos el radicando en suma de quebrados. Las raíces múltiples, tanto reales como imaginarias, las separamos en tantas fracciones como indique el exponente, empezando en la primera fracción con el denominador elevado a la unidad y añadiendo las fracciones necesarias hasta llegar al exponente que tenga en la integral.

$$\frac{2x+1}{(x-2)^2(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} + \frac{Ex+F}{(x^2+4)^2}$$

Donde los numeradores de la raíz compleja son siempre un polinomio de grado uno.

Para calcular el valor numérico de las letras que aparecen en el exponente realizamos la operación de la derecha

$$\frac{2x+1}{(x-2)^2(x^2+4)^2} = \frac{A(x-2)(x^2+4)^2 + B(x^2+4)^2 + (Cx+D)(x-2)^2(x^2+4) + (Ex+F)(x-2)^2}{(x-2)^2(x^2+4)^2}$$

Igualando numeradores, ya que los denominadores son iguales, y dando valores a *"x"* obtenemos los valores numéricos de las letras. La largura del cálculo, dado que creemos que se entiende la idea y hemos hecho ya algo parecido en las integrales racionales anteriores, nos lleva a no hacerlo aquí. Descompuesto el integrando en esas cuatro fracciones, su integral será la suma de las cuatro integrales formadas por cada una de las fracciones. Si que hacemos a continuación la última integral donde el denominador es un polinomio complejo múltiple de grado de multiplicidad dos. Es en ella donde aplicamos la fórmula de Hermite-Ostrogadsky. Las otras tres son integrales conocidas. A las letras ***E y F*** les damos dos valores cualesquiera, ***E=1 y F=2,*** por ejemplo. Aplicando la fórmula dada al principio

$$\int \frac{x+2}{(x^2+4)^2}dx = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \int \frac{Cx+D}{x^2+4}dx$$

Para calcular el valor de las letras derivamos ambos miembros:

$$\frac{x+2}{(x^2+4)^2}=\frac{A(x^2+4)-(Ax+B)2x}{(x^2+4)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

Operando la parte de la izquierda nos queda:

$$\frac{x+2}{(x^2+4)^2}=\frac{A(x^2+4)-(Ax+B)2x+(Cx+D)(x^2+4)}{(x^2+4)^2}$$

Y, dado que los denominadores son iguales, han de ser también iguales los numeradores:

$$x+2= A(x^2+4)-(Ax+B)2x+(Cx+D)(x^2+4)$$

Identidad que se ha de cumplir para cualquier valor de ***x.*** Dando por tanto cuatro valores cualesquiera a ***x*** llegamos a cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas en ***A, B, C y D***. Obviamos hacer aquí puesto que ya se ha hecho en otros ejemplos y es seguir simplemente la mecánica del procedimiento. Nos resta ya hacer la última integral, que tiene la misma forma que en el ejemplo primero. Realmente**, todas las imaginarias acaban en estas dos, o en una de ellas.**

$$\int\frac{Cx+D}{x^2+4}dx$$

$$\int\frac{Cx+D}{x^2+4}dx=\int\frac{Cx}{x^2+4}dx+\int\frac{D}{x^2+4}dx$$

Entonces, la primera que nos ha quedado es:

$$\int\frac{Cx}{x^2+4}dx=C\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+4}dx=C\frac{1}{2}Ln|x^2+4|$$

La segunda es inmediata, también exactamente igual a la del ejemplo primero.

$$\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}$$

Será entonces:

$$\int\frac{D}{x^2+4}dx=|a^2=4\rightarrow a=2|=D\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}$$