victor loza
ACADEMIA ONLINE

NÚMEROS COMPLEJOS

UNIDAD IMAGINARIA i

Se define el número

$$\boldsymbol{i = \sqrt{-1}}$$

Como la **unidad imaginaria**. Por lo tanto, se cumple

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$

Siendo entonces $i^5 = i^4 \cdot i = i$ y repitiéndose entonces los valores de las potencias en esta secuencia de cuatro en cuatro.

Para calcular una potencia cualquiera de i procedemos de la siguiente manera:

Ejemplo

$$\boldsymbol{i^{247}} = \left|\frac{247}{4} = 61{,}75 \to \boldsymbol{247 = |61 \cdot 4 = 244| = 61 \cdot 4 + 3}\right| = i^{61\cdot 4+3}$$

$$= i^{61\cdot 4} \cdot i^3 = |i^3 = -i| = (i^4)^{61} \cdot (-i) = |i^4 = 1| = \boldsymbol{-i}$$

También, como vemos, coincide con la unidad imaginaria elevada al resto de la división, en este caso tres, pero creemos que es tan corta la deducción que merece la pena tenerla presente.

Con la unidad imaginaria se amplía el conjunto de los números.

NÚMERO COMPLEJO. FORMA BINÓMICA

Un número complejo es una pareja de números reales

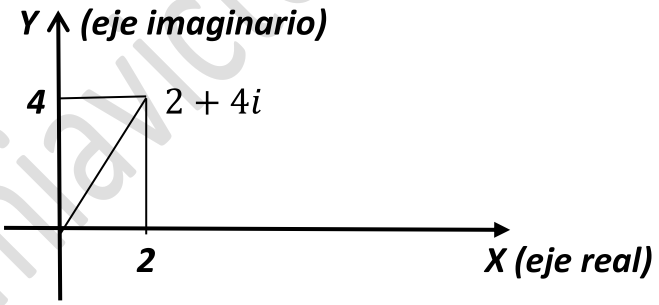
$$\boldsymbol{a + bi}$$

El número "a" es lo que denomina parte real y el número "b" parte imaginaria, **siendo entonces los números reales que hemos conocido hasta ahora los números complejos cuya parte imaginaria es cero.** A esta forma de escribir un número complejo se la llama **forma binómica.**

Representación gráfica:

Dado que un número complejo tiene dos componentes, se representa en el plano, donde el eje X es el eje real y el eje Y el eje imaginario.

El número, por ejemplo, $2 + 4i$ quedará representado:



Al punto (2,4) se le llama afijo del número complejo $\boldsymbol{2 + 4i}$

OPERACIONES

Una vez definido un número complejo en forma binómica, estudiamos las operaciones básicas: suma y resta, producto y división, potencia y radicación. Creemos que haciendo un ejemplo de cada una de ellas queda claro:

Suma:

$$(\boldsymbol{2 - 3i}) + (\boldsymbol{-1 + 8i}) = 2 - 1 + i(-3 + 8) = \boldsymbol{1 + 5i}$$

Donde se han sumado las partes reales por un lado para obtener la parte real del número resultado, y se han sumado por otro lado las partes imaginarias, sacando factor común i.

Resta

$$(\boldsymbol{-3-i})-(\boldsymbol{8-4i})=-3-i-8+4i=\boldsymbol{-11+3i}$$

Producto

$$(\boldsymbol{2+i})\cdot(\boldsymbol{-3+2i})=2\cdot(-3)+2\cdot(2i)+i\cdot(-3)+i\cdot(2i)=$$

$$=-6+4i-3i+2i^2=|i^2=-1|-6+i-2=\boldsymbol{-8+i}$$

División

Para dividir en esta forma binómica, se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{\boldsymbol{2-i}}{\boldsymbol{-4+i}}=\frac{(2-i)(\boldsymbol{-4-i})}{(-4+i)(\boldsymbol{-4-i})}=\frac{-8-2i+4i+i^2}{16+4i-4i-i^2}=$$

$$=\frac{-9+2i}{17}=\frac{\boldsymbol{-9}}{\boldsymbol{17}}+\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{17}}\boldsymbol{i}$$

Potenciación

Elevar un número complejo a un exponente alto en la forma binómica es igual de largo que elevar una suma de números reales. Se utiliza para ello el binomio de Newton, pero, como veremos más adelante, la potenciación es mucho más sencilla si utilizamos otra forma de escribir un número complejo, la **forma polar**. Aquí hacemos un ejemplo aunque siempre lo intentaremos en la forma polar si se puede.

$$(\mathbf{2}+\mathbf{3}\boldsymbol{i})^{\mathbf{4}}=\binom{4}{0}2^4+\binom{4}{1}2^3(3i)+\binom{4}{2}2^2(3i)^2+\binom{4}{3}2(3i)^3+\binom{4}{4}(3i)^4=$$

$$=1\cdot 2^4+4\cdot 2^3 3i+6\cdot 2^2\cdot 3^2 i^2+4\cdot 2\cdot 3^3 i^3+1\cdot 3^4\cdot i^4=$$

$$16+96i-216-72i+81=\mathbf{-119+24}\boldsymbol{i}$$

Donde, para simplificar la expresión, se han tenido en cuenta los valores de las distintas potencias de la unidad imaginaria que hemos visto al principio. La radicación, que veremos más adelante, se hace siempre en forma polar por lo que pasamos a explicar esta forma en la siguiente lección. Indicar también que la forma polar es la más cómoda para operar, excepto sumas y restas que haremos en forma binómica porque en forma polar no tienen fórmula.