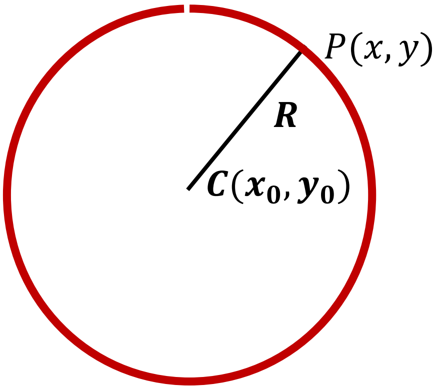
CIRCUNFERENCIA

Para calcular la ecuación matemática de cualquier "figura", en este caso la circunferencia, tenemos que partir de la propiedad que cumplen el conjunto de puntos que queremos definir de forma matemática. **La circunferencia se define como el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo, que llamamos centro, una distancia constante que llamamos radio.** Forman, dibujados, lo que llamamos circunferencia.



Para calcular la ecuación matemática que cumplen los puntos de la circunferencia no tenemos más que imponer la condición que proviene de la definición:

$$d(CP) = R$$

Dado que la distancia entre los puntos $P(x, y)$ y $C(x_0, y_0)$ es, como sabemos, el módulo del vector formado por ambos puntos, tenemos:

$$\overrightarrow{CP} = (x - x_0, y - y_0) \rightarrow$$

$$d(CP) = \left|\overrightarrow{CP}\right| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Y aplicando la condición

$$d(CP) = R \rightarrow \sqrt{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0})^2 + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0})^2} = \boldsymbol{R}$$

Fórmula sencilla de la que podemos partir si queremos. Sin embargo, operando llegamos a otra expresión equivalente pero también muy utilizada y que debemos saber:

Elevando al cuadrado los dos miembros de la igualdad anterior:

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})^2+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y_0})^2=R^2$$

Y operando:

$$x^2+y^2-2x_0\cdot x-2y_0\cdot y+x_0^2+y_0^2-R^2=0$$

Llamando

$$(1)\begin{cases} A=-2x_0 \\ B=-2y_0 \\ C=x_0^2+y_0^2-R^2 \end{cases}$$

Nos queda ya otra ecuación que utilizaremos con mucha frecuencia:

$$\boldsymbol{x^2+y^2+Ax+By+C=0}$$

Y que nosotros llamaremos canónica y en donde no debemos olvidar la igualdad de la llave (1)

Ejemplo 1

Deducir se la siguiente ecuación pertenece a una circunferencia o no. Si así fuera, calcular su centro y su radio

$$2x^2+2y^2-2x+2y-14=0$$

Si nos preguntan sobre si una ecuación pertenece a una circunferencia procedemos de la siguiente manera:

Lo primero que vemos que los coeficientes de la "x" al cuadrado y la "y" al cuadrado no son UNO como en la ecuación canónica, pero si dividimos entre DOS nos queda

$$x^2+y^2-x+y-7=0$$

Que sí puede ser una circunferencia si se cumple:

$$(1)\begin{cases} \boldsymbol{A = -2x_0 \to -1 = -2x_0} \to x_0 = \dfrac{1}{2} \\ \boldsymbol{B = -2y_0 \to 1 = -2y_0} \to y_0 = -\dfrac{1}{2} \\ \boldsymbol{C = x_0^2 + y_0^2 - R^2 \to -7 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - R^2} \to R = \sqrt{\dfrac{15}{2}} \end{cases}$$

Siendo entonces una circunferencia con esas características. ¿Cuándo no hubiera sido una circunferencia entonces?

Si los dos coeficientes de "x" al cuadrado y de "y" al cuadrado no son iguales o

Si el radio nos hubiera salido igual a la raíz cuadrada de un número negativo que, como sabemos, no existe en el campo de los números reales en el que estamos.

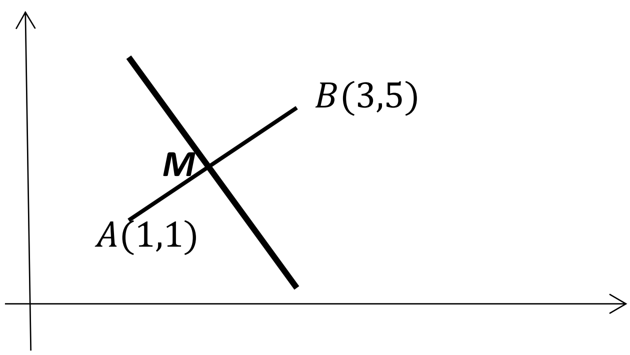
En todos los problemas sobre circunferencia tendremos que calcular por los datos que tengamos el CENTRO Y EL RADIO.

Ejemplo 2

Calcular la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $\boldsymbol{A(1,1)}$ $\boldsymbol{B(3,5)}$ y cuyo centro está en la recta $\boldsymbol{x + y + 1 = 0}$

Como sabemos que pasa por dos puntos, su centro equidistará de ambos y estará por lo tanto en la mediatriz.

Calculamos por eso, lo primero, la mediatriz del segmento AB:



Sabemos que pasa por el punto medio del segmento AB y es perpendicular a él.

Punto medio del segmento:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = (2,3)$$

Ya sabemos un punto por el que pasa la mediatriz, ahora nos hace falta el vector. **Recuerda: un vector perpendicular a uno dado** $\boldsymbol{(a,b)}$ $\boldsymbol{es}$ $\boldsymbol{(-b,a)}$ $\boldsymbol{o}$ $\boldsymbol{(b,-a)}$ esto es muy importante para calcular rectas perpendiculares (si dos rectas son paralelas no hay ningún problema porque tienen el mismo vector). Para trabajar y calcular ecuaciones de rectas lo mejor es **trabajar con el vector de la recta que tiene su dirección, vector director, y utilizar la ecuación en forma continua** (trabajar con la general, cuyos coeficientes no coinciden con los del vector de la recta, sino que son los coeficientes de un vector perpendicular, creemos que lía el entendimiento y los cálculos).

El vector AB es perpendicular a la mediatriz

$$\overrightarrow{AB} = (B - A) = (3 - 1, 5 - 1) = (2,4)$$

Como el vector de la mediatriz es perpendicular será

$$\boldsymbol{\vec{v}_{Mediatriz} = (4,-2)}$$

Y su ecuación será:

$$\begin{cases} Punto\ (2,3) \\ \vec{v} = (4,-2) \end{cases} \rightarrow \frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} \rightarrow \boldsymbol{\frac{x-2}{4} = \frac{y-4}{-2}}$$

Y ahora, si queremos, es cuando pasamos esa ecuación a la forma general:

$$-2(x-2) = 4(y-4) \rightarrow -2x - 4y + 20 = 0 \rightarrow x + 2y - 10 = 0$$

Ya sabemos entonces que el centro pertenece a esta recta

$$\boldsymbol{x + 2y - 10 = 0}$$

Pero como también, según dato del problema, pertenece a la recta

$$x + y + 1 = 0$$

El centro será entonces en la intersección de las dos rectas:

$$\begin{cases} x + 2y - 10 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow x = -12 \quad y = 11$$

Ya sabemos el centro

$$\boldsymbol{C(-12,11)}$$

Nos falta el radio, pero se ve fácilmente que es la distancia del centro calculado a cualquiera de los dos puntos dados, por los que pasa la circunferencia:

$$R = d(AC) = \left|\overrightarrow{AC} = (-12-1, 11-1) = (-13,10)\right| =$$

$$= \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-13)^2 + 10^2} = \sqrt{269}$$

Siendo entonces la ecuación de la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 2x_0 \cdot x - 2y_0 \cdot y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0 \rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2(-12) \cdot x - 2(11) \cdot y + (-12)^2 + (11)^2 - 269 = 0$$

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + 24x - 22y - 4 = 0}$$