victor loza
ACADEMIA ONLINE

ROTACIONES ALREDEDOR DE UN EJE FIJO

En estos problemas, aplicaremos a las poleas la ley fundamental de la dinámica de rotación de un sólido en rotación alrededor de un eje fijo:

$$\boldsymbol{M_{eje} = I \cdot \alpha}$$

A los cuerpos que "cuelguen" de ellas, al tratarse normalmente de traslaciones, le aplicaremos las leyes de la dinámica de traslación para las partículas. Por último, habrá una relación entre la aceleración angular de la polea**,** $\boldsymbol{\alpha}$, y la aceleración, ***a,*** tangencial de los cuerpos que cuelgan de ella

$$\boldsymbol{a = \alpha \cdot R}$$

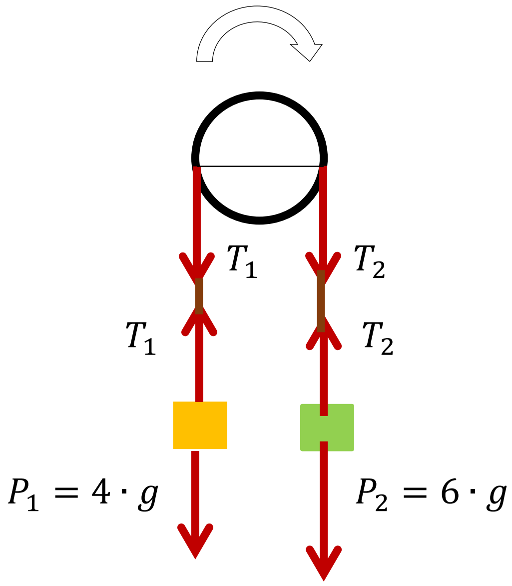
Ejemplo 1

Dos masas de $\boldsymbol{m_1 = 4\, kg\; y\; m_2 = 6kg}$ ***cuelgan de los extremos de una cuerda que pasa por una polea de masa M=10Kg y radio R=50cm tal como indica la figura. Calcular la aceleración con la que se mueven las masas y la aceleración angular de la polea.***

Tener en cuenta que cuando la polea ya no es despreciable **las tensiones a ambos lados NO son iguales.** (Si fueran iguales la polea no podría girar pues los efectos de las dos tensiones iguales se contrarrestarían)

Como el momento mayor corresponde al peso mayor pues la distancia al eje de ambos es la misma (el radio) el sentido de giro de la polea es el indicado, el que corresponde al peso de la masa de $6\;Kg$

Como ya hemos hecho en otros problemas, vamos a estudiar cada cuerpo por separado:



Cuerpo m_1

Se trata de la traslación de una masa que podemos considerar puntual hacia arriba. Aplicamos por ello las leyes de Newton a la traslación de una partícula:

$$\boldsymbol{T_1 - 40 = 4 \cdot a} \;\; \textit{(1)}$$

Donde ponemos $a\ en\ vez\ de\ a_1$ puesto que la aceleración de las dos masas va a tener el mismo módulo pues ambas están unidas por la misma cuerda. Hemos restado a la tensión el peso pues el cuerpo acelera hacia arriba.

Cuerpo m_2

$$\boldsymbol{60 - T_2 = 6 \cdot a} \;\; \textit{(2)}$$

Donde se ha restado al peso la tensión pues el cuerpo está acelerando hacia abajo.

Como vemos, tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas. La tercera ecuación necesaria para la resolución viene del estudio de la polea como sólido rígido:

Polea

En palabras, la ley que aplicamos como hemos dicho al principio es: momentos a favor del giro menos momentos en contra igual al producto del momento de inercia por la aceleración angular.

El momento de inercia de una polea alrededor de su eje es el de un cilindro

$$\boldsymbol{I = \frac{1}{2}MR^2} = \frac{1}{2}10 \cdot 0{,}5^2 = \frac{5}{4} = \boldsymbol{1{,}25\ kgm^2}$$

Como gira en el sentido señalado, el momento a favor es el de la tensión T_2 yendo en contra el momento de la tensión T_1. Por lo tanto, aplicando la ley:

$$\boldsymbol{M = I \cdot \alpha}$$

$$T_2 \cdot R - T_1 \cdot R = I\alpha \rightarrow$$

$$\boldsymbol{T_2 \cdot 0{,}5 - T_1 \cdot 0{,}5 = 1{,}25 \cdot \alpha}\ (3)$$

El sistema de tres ecuaciones contiene, aparentemente, cuatro incógnitas: $T_1, T_2, a\ y\ \alpha$

Pero siempre hay una relación entre $a\ y\ \alpha$ ya que $a = \alpha R$ quedándonos en nuestro caso:

$$\boldsymbol{a = \alpha \cdot 0{,}5}\ \ \textit{(4)}$$

Que podemos considerar como la cuarta ecuación que, junto con las otras tres, forma un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Lo resolvemos en este problema, pero los sistemas de ecuaciones, en los siguientes problemas, los dejaremos indicados sin resolver dando después su solución.

$$\left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{T_1 - 40 = 4\alpha \cdot 0{,}5} \\ \boldsymbol{60 - T_2 = 6\alpha 0{,}5} \\ (T_2 - T_1) \cdot 0{,}5 = 1{,}25\alpha \rightarrow \boldsymbol{T_2 - T_1 = 2{,}5\alpha} \end{array}\right.$$

Donde en las tres primeras se ha sustituido $a = \alpha 0{,}5$, ecuación ***(4),*** Sumando las tres:

$$20 = 7{,}5\alpha \rightarrow \boldsymbol{\alpha = 2,66\ {}^{Rd}/_{s^2}}$$

Y llevando este valor de alfa a las dos primeras tenemos:

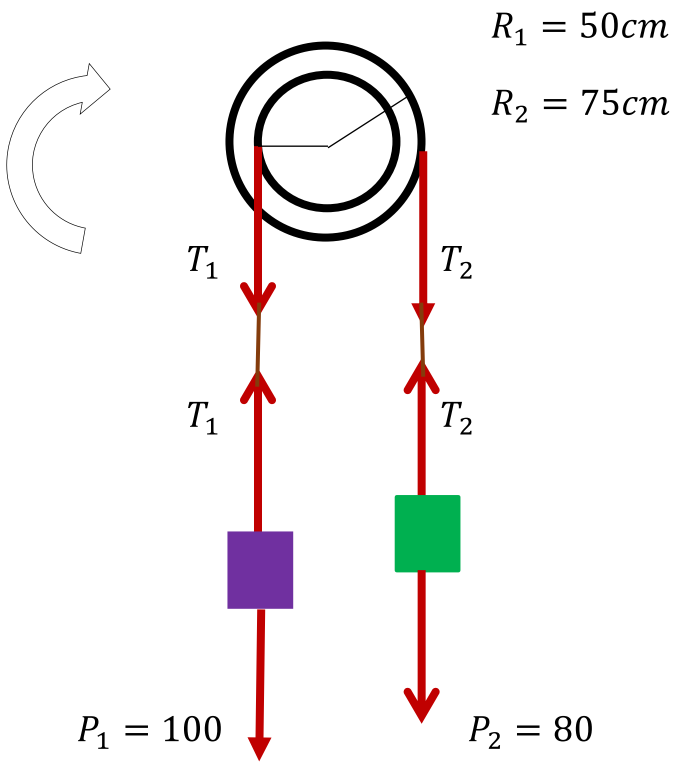
$$\boldsymbol{T_1} = 2\alpha + 40 = \boldsymbol{45,33\ N}$$

$$\boldsymbol{T_2} = 60 - 3\alpha \cong \boldsymbol{52\ N}$$

$$\boldsymbol{a} = \alpha R = 2{,}66 \cdot 0{,}5 = \boldsymbol{1,33\ {}^{m}/_{s^2}}$$

Ejemplo 2

Dos poleas solidarias y con el mismo eje de masas 15 y 20 kilogramos y de radios 50 y 75 cm respectivamente sostienen dos cuerpos cada una por medio de dos cuerdas que pasan por cada una de ellas. De la polea pequeña cuelga una masa $m_1 = 10kg$ y de la grande una masa $m_2 = 8kg$. Deducir el sentido de giro de las poleas y las aceleraciones de los dos cuerpos y la aceleración angular de las poleas.



Lo primero que hacemos es deducir hacía que lado va a girar la polea. Para ello tenemos en cuenta los momentos de los dos pesos:

$$M_1 = P_1 R_1 = 100 \cdot 0{,}5 = 50\ N \cdot m$$

$$M_2 = P_2 R_2 = 80 \cdot 0{,}75 = 60\ N \cdot m$$

Ya que el giro es en el sentido del mayor momento, las poleas girarán en el sentido horario, bajando la masa de ***8 kg*** y subiendo la de ***100 Kg.***

$\boldsymbol{m_1}$:

Es una traslación, aplicamos la ley de Newton:

$$\boldsymbol{T_1 - 100 = 10a_1} \quad \textit{(1)}$$

$\boldsymbol{m_2}$:

$$\boldsymbol{80 - T_2 = 8a_2} \quad \textit{(2)}$$

Sistema de poleas:

Primero calculamos el momento de inercia del conjunto. Dado que, por definición, el momento de inercia es una suma, **el momento de inercia de un conjunto es la suma de los momentos de inercia:**

Como ya se ha comentado, un disco como una polea es un cilindro. Por lo tanto, aplicamos la fórmula del momento de inercia de un cilindro

$$I = \frac{1}{2}M_1R_1^2 + \frac{1}{2}M_2R_2^2 = \frac{1}{2}15(0{,}5)^2 + \frac{1}{2}20(0{,}75)^2 = 7{,}5\ kgm^2$$

Conocido ya el momento de inercia aplicamos la ley fundamental de la dinámica de rotación respecto de un eje fijo:

$$\boldsymbol{M = I \cdot \alpha}$$

$$T_2R_2 - T_1R_1 = I\alpha \rightarrow$$

$$\boldsymbol{T_2 0{,}75 - T_1 0{,}5 = 7{,}5\alpha} \quad \textit{(3)}$$

El sistema de ecuaciones ***1,2 y 3***, una por cada cuerpo estudiado, contiene cinco incógnitas: $\boldsymbol{T_1,\ T_2,\ a_1,\ a_2\ y\ \alpha}$. Necesitamos otras dos que, generalmente, provienen de la relación entre la aceleración angular y la tangencial:

$$a_1 = \alpha R_1 \rightarrow \boldsymbol{a_1 = \alpha \cdot 0{,}5} \quad \textit{(4)}$$

$$a_2 = \alpha R_2 \rightarrow \boldsymbol{a_2 = \alpha \cdot 0{,}75} \quad \textit{(5)}$$

Tenemos ya cinco ecuaciones con cinco incógnitas que resuelven el problema.

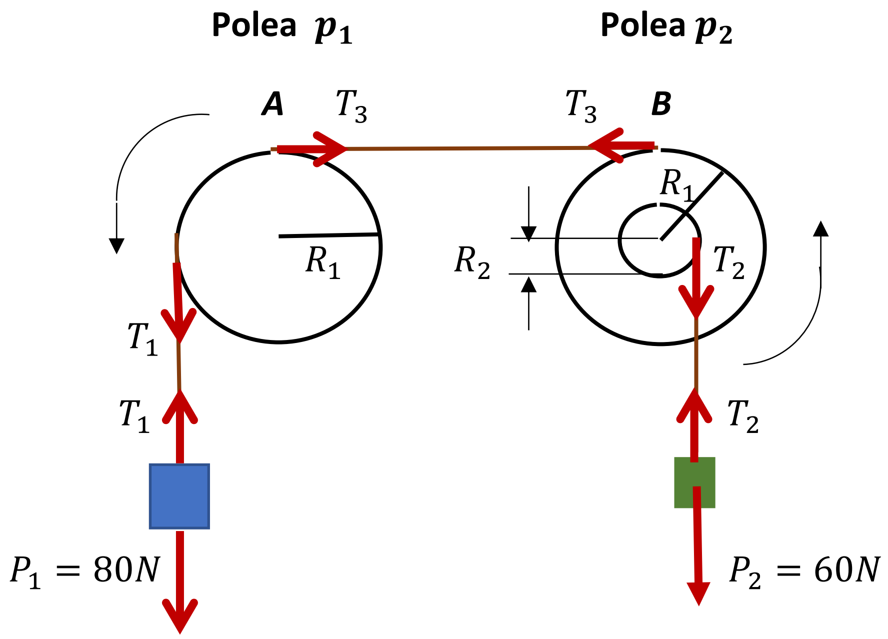
Ejemplo 3

En el sistema de la figura los datos son

$$\boldsymbol{m_1 = 8Kg, m_2 = 6Kg, R_1 = 50cm, R_2 = 20cm, I_{p1} = 10Kgm^2}$$

$$\boldsymbol{I_{p2} = 4Kgm^2}$$

Calcular las aceleraciones lineales de las dos masas y angulares de las dos poleas, así como las tensiones en las tres cuerdas.



El cuerpo más pesado tiene mayor momento, ya que su "brazo" es también mayor, $R_1 > R_2$

Como siempre, estudiamos cada cuerpo por separado, teniendo en cuenta que la masa m_1 baja, la masa m_2 sube y el sentido de giro de las poleas es, por lo tanto, el indicado:

Masa m_1

Al tratarse de una simple traslación:

$$\mathbf{80 - T_1 = 8a_1 \quad (1)}$$

Masa m_2

$$\mathbf{T_2 - 60 = 6a_2 \quad (2)}$$

Ahora, estudiamos las poleas:

Polea p_1

Teniendo en cuenta el sentido de giro y aplicando “momentos a favor menos momentos en contra”:

$$T_1 \cdot R_1 - T_3 \cdot R_1 = I_{p1} \cdot \alpha_1$$

$$\mathbf{T_1 \cdot 0,5 - T_3 \cdot 0,5 = 10 \cdot \alpha_1 \quad (3)}$$

Polea p_2

Aplicando la misma ley que a la polea anterior

$$T_3 \cdot R_1 - T_2 \cdot R_2 = I_{p2} \cdot \alpha_2$$

$$\mathbf{T_3 \cdot 0,5 - T_2 \cdot 0,2 = 4 \cdot \alpha_2 \quad (4)}$$

Sistema de cuatro ecuaciones con $T_1, T_2, T_3, a_1, a_2, \alpha_1\ y\ \alpha_2$ como incógnitas. **Nos hacen falta por ello otras tres ecuaciones para que el sistema tenga solución única. Estas tres ecuaciones provienen de la relación entre las aceleraciones lineales y angulares, según la figura**.

Dado que los puntos ***A y B*** de la cuerda horizontal que une a las dos poleas tienen la misma aceleración tangencial se cumplirá

Punto A

$$a_A = \alpha_1 \cdot R_1$$

Punto B

$$a_B = \alpha_2 \cdot R_1$$

Por lo tanto

$$a_A = a_B \rightarrow \alpha_1 \cdot R_1 = \alpha_2 \cdot R_1 \rightarrow$$

$$\boldsymbol{\alpha_1 = \alpha_2} \ \ \mathbf{(5)}$$

Ahora relacionamos las aceleraciones lineales de los cuerpos con las angulares de las poleas teniendo en cuenta las cuerdas a las que están agarradas los bloques y las poleas por las que pasan:

$$a_1 = \alpha_1 \cdot R_1 \rightarrow a_1 = \boldsymbol{\alpha_1 \cdot 0,5} \ \ \mathbf{(6)}$$

$$a_2 = \alpha_2 \cdot R_2 \rightarrow a_2 = \boldsymbol{\alpha_2 \cdot 0,2} \ \ \mathbf{(7)}$$

Resolviendo el sistema de siete ecuaciones con siete incógnitas sabríamos las aceleraciones lineales de los dos cuerpos y las angulares de las poleas.