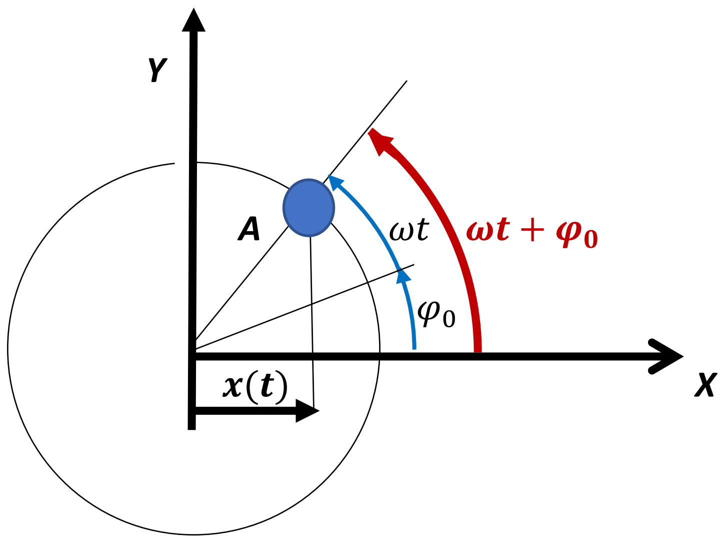
MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

El movimiento armónico simple, M.A.S. en adelante, es un movimiento de vaivén que podemos visualizar como la **sombra sobre el eje X de un punto ("bolita azul") cuando recorre con velocidad angular ω constante una circunferencia de radio A, llamado amplitud del movimiento** (evidentemente, también la sombra sobre el eje Y será un M.A.S., aunque nosotros elegimos el eje X) según la figura. Cuando empezamos a contar el tiempo la bolita está en la posición inicial definida por el ángulo φ_0. Al empezar a moverse recorrerá en un tiempo ***t*** el ángulo $\boldsymbol{\omega \cdot t}$ y, por lo tanto, el ángulo que marca su posición en un tiempo ***t* será** $\boldsymbol{\omega t + \varphi_0}$**.** La sombra de la bolita azul en su movimiento ocupa la posición $x(t)$, que es lo que define, como hemos dicho, al movimiento armónico y que es lo que queremos calcular. Como es el cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el radio de la circunferencia, ***A***, será igual a ésta por el coseno del ángulo $\boldsymbol{\omega t + \varphi_0}$**.**



$$\boldsymbol{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)} \quad \textbf{\textit{(1)}}$$

Derivando la posición obtenemos, como debemos de saber, la velocidad es:

$$v(t) = -A\omega sen(\omega t + \varphi_0) \;\; \textbf{\textit{(2)}}$$

Y derivando la velocidad obtenemos la aceleración:

$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) \;\; \textbf{\textit{(3)}}$$

Sino sabemos derivar todavía, debido a la mala organización que suele ocurrir entre la enseñanza de las matemáticas y de la física, no nos quedará más remedio que sabernos de memoria las fórmulas de la velocidad y de la aceleración.

Estas son las **tres fórmulas fundamentales** en donde, como se aprecia, tenemos las magnitudes **del movimiento en función del tiempo**. Sin embargo, a veces es conveniente tener la **relación de la velocidad y de la aceleración en función de la posición *x(t)*.** Esas relaciones, de fácil demostración, son las siguientes:

Velocidad en función de la posición

$$v(x) = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \;\; \textbf{\textit{(4)}}$$

El signo $\pm$ indica que en una posición ***x(t)*** cualquiera, la velocidad puede ser en los dos sentidos, un sentido al ir y otro al volver, pues es un movimiento de "vaivén".

Aceleración en función de la posición

$$a(x) = -\omega^2 x \;\; \textbf{\textit{(5)}}$$

Estas cinco fórmulas son las más importantes y con las cuales se pueden resolver todos nuestros problemas. Recalcar que la fórmula (5) sirve también de definición matemática y física de M.A.S. y también que este movimiento es muy típico en la naturaleza (Las ondas electromagnéticas y otros muchos tipos de ondas siguen esta ley).

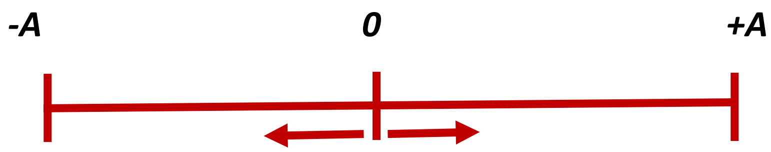
Recordamos que el periodo, ***T***, el tiempo en dar una vuelta, y por lo tanto el tiempo en hacer un "vaivén" entero o "carrera", está relacionado con la velocidad angular según

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Detallamos a continuación en una figura este movimiento y los valores de la velocidad y de la aceleración en las posiciones más representativas, en los extremos de la "carrera" y en su punto medio.

Velocidad

$$v(x) = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \quad \textbf{(4)}$$



$$v(-A) = 0 \qquad v(0) = \pm A\omega \qquad v(+A) = 0$$

Para calcular esos valores de la velocidad se ha sustituido el valor de ***x*** en la fórmula **(4).** En los extremos de la carrera ***x=-A*** y ***x=A*** el valor que nos da la ley es cero, como no podría de ser de otra manera porque en esos puntos la velocidad cambia de sentido. Observar también que la **velocidad es máxima cuando el sustraendo de la raíz es máximo, y eso ocurre en *x=0***.

A la misma conclusión hubiéramos llegado si utilizamos la fórmula

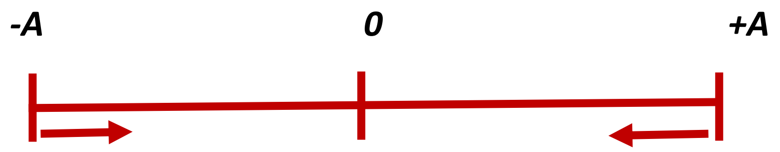
$$v(t) = -A\omega sen(\omega t + \varphi_0)$$

Pues la velocidad será máxima en módulo cuando el seno tome los valores máximos ± 1**,** obteniéndose entonces

$$v = \pm A\omega$$

Aceleración

$$a(x) = -\omega^2 x \quad \textbf{(5)}$$



$$a(-A) = \omega^2 A \qquad a(0) = 0 \qquad a(+A) = -\omega^2 A$$

Donde observamos que la aceleración máxima en módulo se alcanza en los extremos por ser ahí el valor máximo que toma ***x.*** Este valor máximo lo podemos también deducir, al igual que la velocidad, de la tercera fórmula

$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Puesto que su valor máximo, $\pm\omega^2 A$, **se obtiene cuando el coseno toma sus valores máximos ± 1.**

Ejemplo

Un movimiento armónico sobre el eje X sigue la ecuación la ecuación $x(t) = 2cos(4\pi t + \pi)$ en unidades del S.I. Calcular su periodo, longitud de la carrera y los valores máximos de la velocidad y de la aceleración

Si comparamos con la ecuación ***(1)*** sabemos que el coeficiente del coseno, ***2***, es el valor de A, de la amplitud. Como la carrera es el doble, contestamos a la primera pregunta: **el valor de la carrera es 4**.

Para contestar a los valores máximos de la velocidad y de la aceleración, dado que vienen dados por $v = A\omega \;\; a = A\omega^2$, hemos de conocer ω, ya que el valor de A ya lo conocemos. Si nos fijamos otra vez en la fórmula ***(1)*** debemos de ver que el coeficiente del tiempo es $\boldsymbol{\omega}$. En nuestro caso, entonces

$$\boldsymbol{\omega = 4\pi}$$

De donde deducimos también el periodo

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \boldsymbol{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\pi} = \mathbf{0.5}\ \boldsymbol{s}$$

Quedándonos entonces la velocidad y aceleración máximas

$$\boldsymbol{v_M = A\omega \rightarrow v_M = 2 \cdot 4\pi = 8\pi\ {}^{m}/_{s}}$$
$$\boldsymbol{a_M = A\omega^2 = 2(4\pi)^2 = 32\pi^2\ {}^{m}/_{s^2}}$$

Hemos contestado a los módulos, porque las posiciones y sentidos en dónde ocurren ya los sabemos por las figuras.