victor loza
ACADEMIA ONLINE

REGLA DE L´HÔPITAL

La regla de L´Hôpital SÓLO ESTÁ JUSTIFICADA EN LAS DOS SIGUIENTES INDETERMINACIONES

$$\frac{\infty}{\infty}, \ \frac{0}{0}$$

Es una regla muy sencilla y la aplicaremos si no se nos ocurre otra cosa, además de que en algunos casos es la única manera sencilla de hacer un límite. Es verdad que, si la aplicamos de primeras, sin observar posibles equivalencias, muchas veces es larga y pesada. Pero la aplicación de equivalencias no es un método que se utilice normalmente en 2º de bachiller. Por eso, hablamos de ellas en las lecciones de cálculo de 1º de universidad.

La regla de L´Hôpital es la siguiente:

Si se cumple alguna de las dos condiciones siguientes:

$$\begin{cases} \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \\ \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \\ \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty \end{cases}$$

Podemos decir que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f´(x)}{g´(x)}$$

Que constituye la regla de L´Hôpital. **SE INSISTE EN QUE SOLAMENTE SE CUMPLE EN ESTOS DOS CASOS. La regla se puede aplicar las veces que sea necesario. Si aplicada la primera vez sigue saliendo una indeterminación de ese tipo se aplica una segunda vez y las veces que sean**

necesarias. PERO HAY QUE SIMPLIFICAR LO QUE SE PUEDA ANTES DE APLICARLA OTRA VEZ.

Ejemplo 1

Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1-x}-1}$$

Como en cualquier límite**, lo primero que miramos es si está indeterminado y de qué tipo de indeterminación se trata**. En nuestro caso, si sustituimos ***"x"*** por cero la expresión resulta una **indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicamos L´Hôpital**

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1-x}-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{1-x}}(-1)} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -\mathbf{2}$$

Ejemplo 2

Calcular

$$\lim_{x\to \infty} \frac{e^{3x}+x}{e^{2x}+x^2}$$

Si ***"x"*** tiende a infinito, tanto el numerador como el denominador tienden a infinito. Por lo tanto, tenemos una **indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.**

Aplicamos L´Hôpital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{3x}+x}{e^{2x}+x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{3x}\cdot 3+1}{e^{2x}\cdot 2+2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3e^{3x}\cdot 3}{2e^{2x}\cdot 2+2}$$
$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\frac{9e^{3x}\cdot 3}{4e^{2x}\cdot 2}}$$

Nos queda ya sólo el cociente de dos exponenciales. Si seguimos derivando se van a volver a repetir. **Por ello, seguir aplicando la regla no nos va a resolver el problema.** Pero podemos simplificar el cociente de dos exponenciales de la misma base:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9e^{3x}\cdot 3}{4e^{2x}\cdot 2}=\lim_{x\to\infty}\frac{27}{4}e^{3x-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{27}{4}e^{x}=\infty$$

Pero ¿qué hacemos con las demás indeterminaciones? Evidentemente, como se ha dicho, sólo se puede aplicar L´Hôpital en estos dos casos. Sin embargo, podemos transformar las demás indeterminaciones en una de estas dos, EXCEPTO LA INDETERMIANCIÓN $\infty-\infty$, que seguiremos resolviendo multiplicando y dividiendo por el conjugado.

Veamos cómo se transforman las demás:

INDETERMIANCIÓN $0\cdot\infty$

Dado que el producto de dos números lo podemos poner también como cociente según

$$\boldsymbol{a\cdot b=\frac{a}{\frac{1}{b}}=\frac{b}{\frac{1}{a}}}$$

Veamos en los siguientes ejemplos, cómo utilizando la expresión anterior transformamos la indeterminación $0\cdot\infty$ en uno de los dos cocientes en los que se puede aplicar la regla.

Ejemplo 3

Calcular

$$\lim_{x \to o^+} xlnx$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \left| \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \right| = \left(\mathbf{0}\cdot(-\infty)\right)$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{-\infty}{\infty}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} == \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = \mathbf{0}$$

Se advierte que al transformar el producto en una división se deje en el numerador a la función más "complicada", en nuestro caso el logaritmo. También podríamos haber hecho

$$xLnx = \frac{x}{\frac{1}{Lnx}}$$

pero al aplicar ahora la regla, la derivada del denominador se nos complica mucho más que como lo hemos hecho en el ejemplo.

victor loza
ACADEMIA ONLINE

INDETERMINACIONES EXPONENCIALES

Se distinguen dos casos:

1. *INDETERMINACIONES* $\mathbf{0^0}$ $\infty^{\mathbf{0}}$

Cuando tengamos cualquiera de estas dos indeterminaciones exponenciales, 0^0 o ∞^0 , aplicaremos siempre la siguiente identidad:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \ln f(x)}$$

QUEDANDO SIEMPRE EL LÍMITE DEL EXPONENTE DE LA FORMA $\mathbf{0} \cdot \infty$ APLICAREMOS ENTONCES LA FORMA ANTERIOR.

Ejemplo 4

Calcular

$$\lim_{x \to 0^+} x^x$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = (0^0) = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x} \quad (1)$$

Teniendo ahora que calcular el límite que aparece en el exponente. Pero ya lo hemos hecho en el ejemplo anterior

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = |Ejemplo\ 3| = 0$$

Y sustituyendo este valor en ecuación (1)

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x} = e^0 = 1$$

2. INDETERMINACIÓN 1^{∞}

En este caso se puede aplicar la ley anterior, pero es mucho más sencilla la siguiente:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\cdot[f(x)-1]}$$

Ejemplo 5

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Como vemos, la base tiende a uno y el exponente a $\pm\infty$, en los dos casos pertenece a la indeterminación $(1)^{\infty}$. Si hay diferencia entre ambos signos se pondrá de manifiesto en el cálculo. Aplicamos la fórmula anterior.

En nuestro caso queda:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(1+x-1)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}} = e$$

Ejemplo 5

Calcular

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+cosx)^{tgx}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+cosx)^{tgx} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} tgx = \infty \\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+cosx) = 1 \end{cases} \to (1^{\infty}) \to$$

Aplicando la fórmula

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+cosx)^{tgx}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} tgx\cdot(1+cosx-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{senx}{cox}\cdot(cosx)}$$

$$=\ e^{1}=e$$

Donde en el último límite del exponente, al simplificar los cosenos, nos queda el límite del ***senx*** cuando ***"x"*** tiende a $\frac{\pi}{2}$**,** cuyo resultado es uno.

Ejemplo 6

Resolver

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty}\frac{5^{x}}{3^{x}}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5^{x}}{3^{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^{-\infty}=\frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$$

En principio estaba indeterminada, pero en este caso con agrupar en una única exponencial es suficiente. Como se ha dicho, cuando queden sólo exponenciales, la regla de L´Hôpital se repite. Agrupar y simplificar suele funcionar.