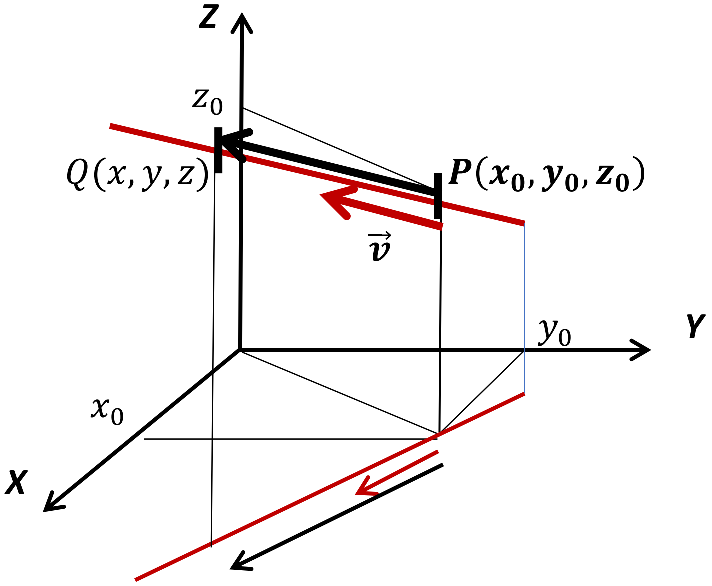
ECUACIÓN DE LA RECTA EN 3D

Aquí, como en dos direcciones, para definir una recta y por lo tanto su ecuación nos **hace falta saber su dirección y su posición**. Por lo tanto, **hemos de conocer siempre, para calcular su ecuación, un punto por el que pasa y un vector que indica su dirección**. En la siguiente figura tenemos la recta que pasa por el punto $\boldsymbol{P(x_0, y_0, z_0)}$ y tiene la dirección del vector $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{v_x}, \boldsymbol{v_y}, \boldsymbol{v_z})$



En la figura hemos dibujado las proyecciones de la recta (en rojo) y de su vector director $\vec{v}$ (también en rojo) sobre el plano ***XY*** para intentar que se vea mejor.

La condición para que un punto cualquiera del espacio $\boldsymbol{Q(x, y, z)}$ esté en la línea recta definida por el punto ***P*** y el vector $\vec{\boldsymbol{v}}$ **es**, como vemos en la figura, **que el vector $\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}}$, en negro, sea paralelo al vector $\vec{\boldsymbol{v}}$.** Traduciendo esta idea al lenguaje matemático:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{v_x}, \boldsymbol{v_y}, \boldsymbol{v_z})$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} = |Q - P| = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_0})$$

Y aplicando la condición de paralelismo de vectores nos queda la ecuación:

$$\boldsymbol{\frac{x-x_0}{v_x}=\frac{y-y_0}{v_y}=\frac{z-z_0}{v_z}}$$

Esta ecuación recibe el nombre de **ecuación continua** de la recta. Fijarse y recordar las posiciones que ocupan las coordenadas del punto y las coordenadas del vector en esa ecuación que más bien son dos como se ve por las dos igualdades que contiene. De esas dos ecuaciones se hablará más adelante, cuando conozcamos la ecuación del plano. Ahora veamos otro tipo de ecuaciones que también representan a la recta, **las ecuaciones paramétricas.** El utilizar un tipo u otro de ecuaciones depende del problema y de lo que nos interese deducir, como veremos.

Si partimos de la ecuación continua anterior

$$\boldsymbol{\frac{x-x_0}{v_x}=\frac{y-y_0}{v_y}=\frac{z-z_0}{v_z}}$$

Para cada punto *(x,y,z)* de la recta los tres quebrados son iguales entre sí e iguales a un número real, variable según el punto (por lo que recibe el nombre de parámetro, según sea su valor nos define un punto u otro) y que vamos a llamar gamma:

$$\frac{x-x_0}{v_x}=\frac{y-y_0}{v_y}=\frac{z-z_0}{v_z}=\gamma \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x=x_0+\gamma\cdot v_x} \\ \boldsymbol{y=y_0+\gamma\cdot v_y} \\ \boldsymbol{z=z_0+\gamma\cdot v_z} \end{cases}$$

Siendo la ecuación remarcada en negrita la que llamamos paramétrica de la recta donde, como en la continua, debemos de fijarnos en las posiciones que ocupan las coordenadas del punto y del vector que definen a la recta**. En estas ecuaciones vemos que los puntos de una recta quedan definidos con un parámetro, se dice por lo tanto que la recta tiene una dimensión.**

Existe una tercera ecuación de la recta, pero en ella interviene la ecuación del plano que todavía no hemos visto. La dejamos, por ello, para más adelante.

Ejemplo:

Calcular la ecuación continua y paramétrica de la recta que pasa por los puntos A (1,-2,3) y B (-1,2,-5)

Para calcular la ecuación de una recta es necesario que conozcamos su posición por medio de un punto y su dirección por medio de un vector. En nuestro caso, respecto de la posición tenemos no uno, sino dos puntos. Cogeremos uno de ellos, cualquiera. Pero no conocemos un vector que indique su posición. Creemos que es bastante sencillo ver que el vector que indica **su dirección es la del vector $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$**. Entonces:

$$\begin{cases} \boldsymbol{Punto}: \boldsymbol{A}\ (\mathbf{1}, -\mathbf{2}, \mathbf{3}) \\ \boldsymbol{vector}: \vec{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{AB} = (B - A) = (-\mathbf{2}, \mathbf{4}, -\mathbf{8}) \end{cases}$$

Siendo entonces la ecuación continua:

$$\frac{\boldsymbol{x} - \mathbf{1}}{-\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{y} - (-\mathbf{2})}{\mathbf{4}} = \frac{\boldsymbol{z} - \mathbf{3}}{-\mathbf{8}}$$

Y la paramétrica

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\gamma}(-\mathbf{2}) \\ \boldsymbol{y} = -\mathbf{2} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{4} \\ \boldsymbol{z} = \mathbf{3} + \boldsymbol{\gamma}(-\mathbf{8}) \end{cases}$$

Insistimos en que, para enfrentarse a problemas más complicados, hemos de tener muy clara la teoría. Eso es lo que pretendemos con estas primeras lecciones.