DEFINICIONES BÁSICAS:

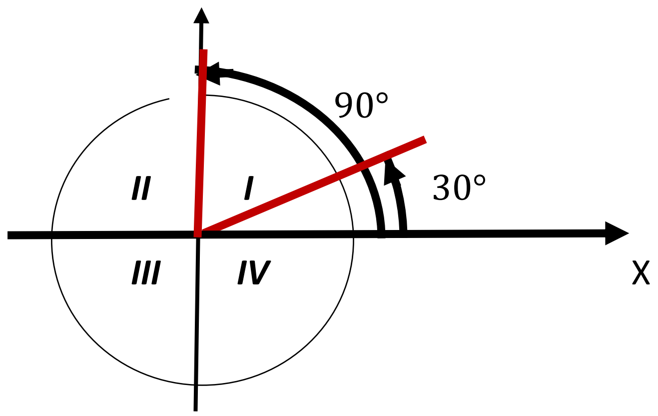
ÁNGULO, UNIDADES. SUMA Y RESTA. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

DEFINICIÓN DE ÁNGULO. UNIDADES

En estos breves apuntes se trata de dar claridad a conceptos nuevos y sin apabullar con muchas fórmulas.

La idea de ángulo proviene de las distintas “aberturas” que pueden formar dos rectas al cortarse y todos tenemos una idea intuitiva de lo que es un ángulo y con eso nos parece suficiente.

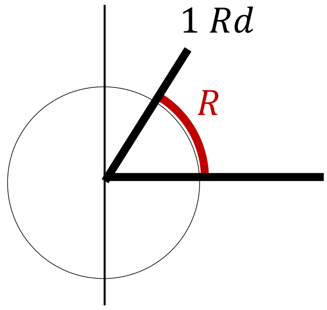
Para medir los ángulos se utiliza el “transportador”, una circunferencia graduada en “grados sexagesimales”. **El ORIGEN DE ÁNGULOS LO ELEGIMOS COMO UNA LINEA HORIZONTAL QUE DEFINIMOS COMO EJE X. ESA LINEA ES FIJA, UN ÁNGULO CUALQUIERA QUEDARÁ DEFINIDO POR ESA LINEA Y OTRA, QUE LLAMAREMOS LINEA “MÓVIL” QUE INDICA EL VALOR DEL ÁNGULO y que en el ejemplo de la figura marcamos en rojo para el ángulo de 30 y 90 grados. Hemos de ver también en la figura que, partiendo de la semirrecta origen de ángulos, el eje X, los ángulos van “creciendo” en el sentido contrario de las agujas del reloj. Ese es el sentido positivo de giro.** Por convenio, al ángulo recto formado por dos rectas perpendiculares se le da el valor de noventa grados; así un transportador de media circunferencia tendría 180 grados:



Quedando la circunferencia entera dividida en 360 grados sexagesimales y en cuatro cuadrantes, I, II, III y IV, como se indica en la figura. No es arbitraria esta elección. Si una vuelta la dividimos en 360º grados, la tierra recorre cada día en su rotación alrededor del sol un grado sexagesimal

Sin embargo, hay otra unidad, una medida fundamental, y que **utilizaremos siempre** sino queremos meter la pata en cálculos un poco más avanzados y en física

Es el Radián o ángulo bajo el cual se ve un radio desde el centro de cualquier circunferencia cuando este radio lo ceñimos a ella:



Como la circunferencia entera mide $2\pi R$ unidades de longitud, longitudes de R unidades caben

$$\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$$

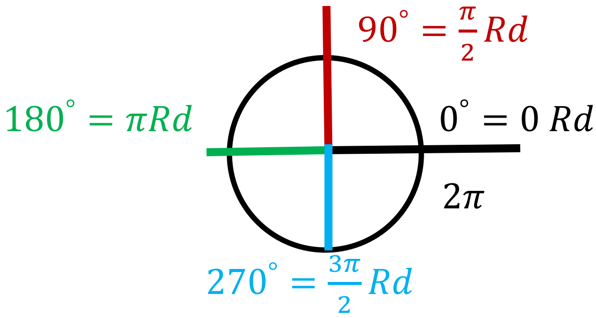
O lo que es lo mismo, **la circunferencia entera contiene $\boldsymbol{2\pi}$ radianes.**

Por lo tanto, la relación o regla de tres para pasar de grados a radianes es:

$$\boldsymbol{360^{\circ} \rightarrow 2\pi\ Rd}$$

Y cada cuadrante

$$\boldsymbol{90^{\circ} \rightarrow \frac{\pi}{2}\ Rd}$$



Ejemplo

Calcular cuánto vale en radianes el ángulo de 60 grados:

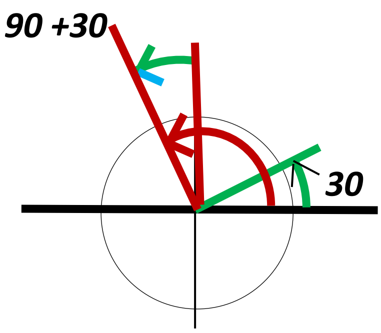
$$\begin{cases} \pi\ Rd \rightarrow 180^{\circ} \\ \quad x \rightarrow 60^{\circ} \end{cases} \rightarrow x = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3} Rd$$

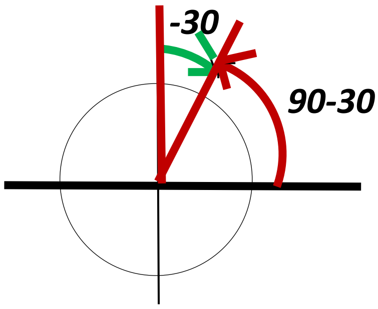
SUMA Y RESTA DE ÁNGULOS

Siempre que se define una magnitud, se definen operaciones sobre ella. Hemos de saber sumar y restar ángulos. Veamos

Si queremos sumarle a un ángulo otro, giraremos su línea "móvil" en sentido antihorario, en el sentido positivo, la cantidad que le queramos sumar. Si queremos restarle un ángulo giraremos su línea móvil en el sentido horario.

Vamos a dibujar dos ejemplos. En el primero le sumaremos al ángulo de 90 grados el ángulo de 30 grados. En el segundo haremos la resta de 90 grados menos 30 grados

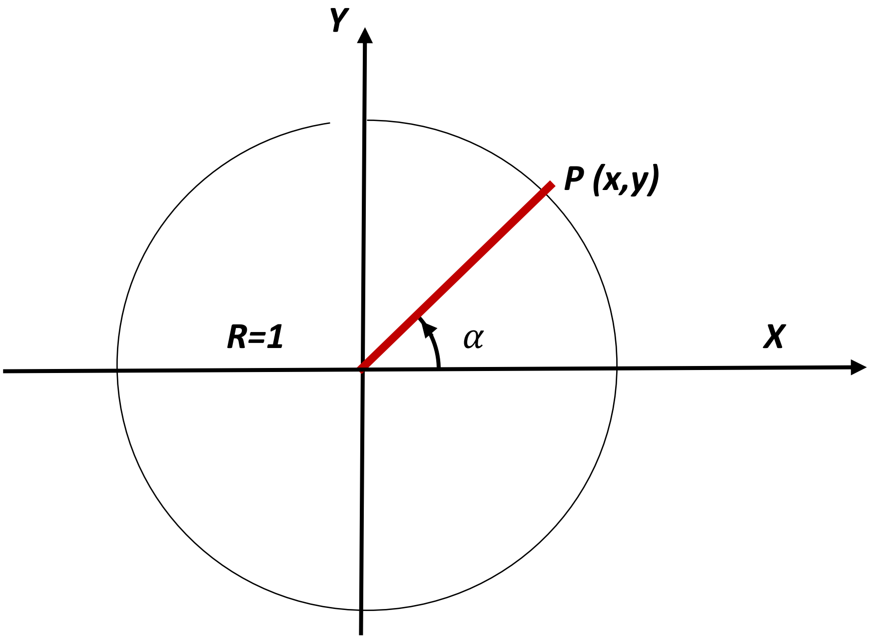




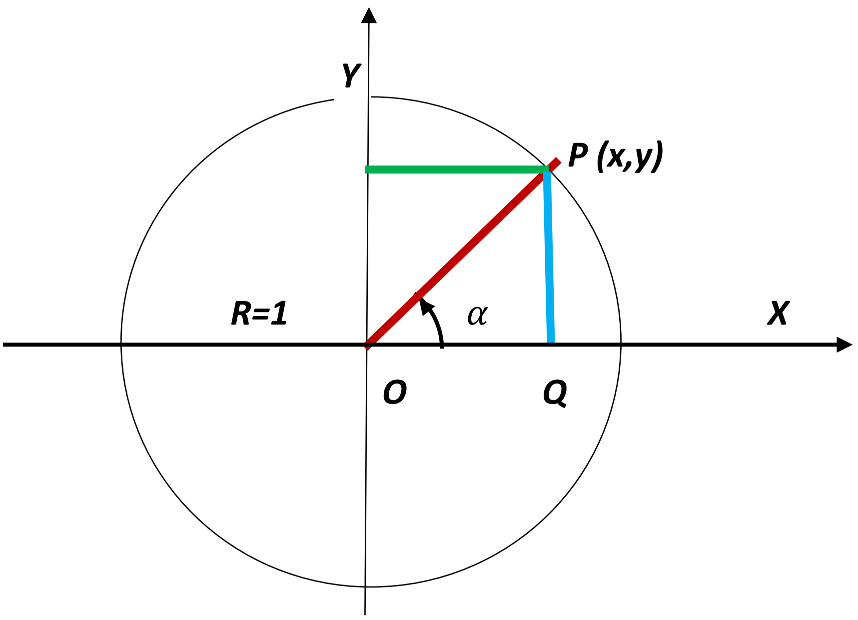
Como hemos intentado reflejar en las figuras, el origen de ángulos está siempre en el eje horizontal derecho (eje X positivo) y, como creemos que se aprecia, todos los ángulos van acompañados de una flecha cuyo origen es ese (eje X positivo).

DEFINICIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

La definición de las principales razones trigonométricas, como las llamaremos a partir de ahora, **seno y coseno** puede enfocarse desde muchos puntos de vista. Nosotros empezamos dando **la definición geométrica sobre la circunferencia de radio unidad** (circunferencia goniométrica –medidora de ángulos-):

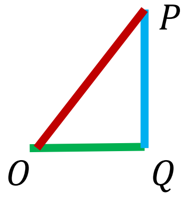


En esta circunferencia hemos marcado un ángulo α cualquiera determinado por el eje X positivo (siempre el origen de ángulos estará en el eje X positivo) y la recta oblicua que hemos dibujado en rojo y que determina el ángulo α. Esta recta corta a la circunferencia en el punto ***P (x,y)***.



LA MAGNITUD *X* DEL PUNTO P (anchura) SE DEFINE COMO EL COSENO DE $\alpha, \boldsymbol{cos\alpha}$. LA MAGNITUD *Y* DEL PUNTO P (altura) SE DEFINE COMO EL SENO DE $\alpha, \boldsymbol{sen\alpha}$.

Recordando que el radio de la circunferencia es uno, si estudiamos el triángulo rectángulo OQP y aplicamos Pitágoras a él tenemos:



$$\overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QP}^2 \rightarrow \begin{cases} \overline{OP} = 1 \\ \overline{OQ} = cos\alpha \\ \overline{QP} = sen\alpha \end{cases} \rightarrow 1 = (cos\alpha)^2 + (sen\alpha)^2 \rightarrow$$

$$1 = cos^2\alpha + sen^2\alpha$$

Fórmula fundamental de la trigonometría y que por supuesto no hay que olvidar. A partir de estas dos fundamentales se definen otra cuatro, de las cuales la más importante con diferencia es la tangente.

TANGENTE

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

COTANGENTE

$$ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{1}{tg\alpha}$$

SECANTE

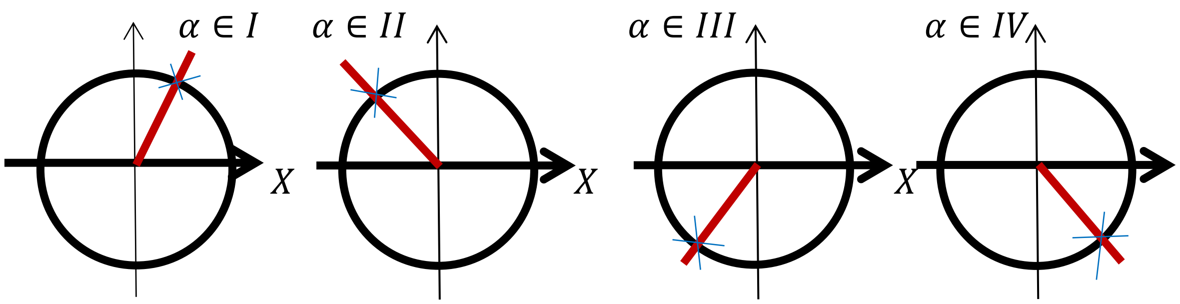
$$sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha}$$

COSECANTE

$$cosec\alpha = \frac{1}{sen\alpha}$$

Entre ellas hay infinitud de relaciones que no nos interesan en esta explicación.

Como hemos definido, los senos son la altura del punto (aspa en azul) que el ángulo determina en la circunferencia y los cosenos la anchura de ese punto. **Por lo tanto, hay que tener en cuenta si son positivos o negativos**:



$$\alpha \in I \rightarrow \begin{cases} X > 0 \rightarrow cos\alpha > 0 \\ Y > 0 \rightarrow sen\alpha > 0 \end{cases}$$

$$\alpha \in II \begin{cases} X < 0 \rightarrow cos\alpha < 0 \\ Y > 0 \rightarrow sen\alpha > 0 \end{cases}$$

$$\alpha \in III \rightarrow \begin{cases} X < 0 \rightarrow cos\alpha < 0 \\ Y < 0 \rightarrow sen\alpha < 0 \end{cases}$$

$$\alpha \in IV \rightarrow \begin{cases} X > 0 \rightarrow cos\alpha > 0 \\ Y < 0 \rightarrow sen\alpha < 0 \end{cases}$$

Los signos del seno y del coseno, y por lo tanto de las demás razones, son fundamentales y por eso la explicación anterior, que no es necesaria memorizar si se entiende la definición y los signos de los puntos en los ejes coordenados.