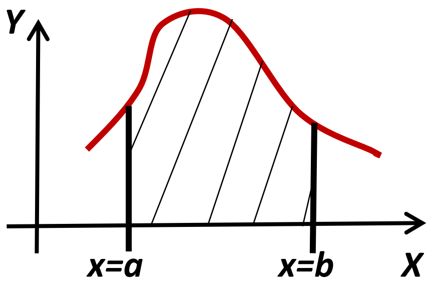
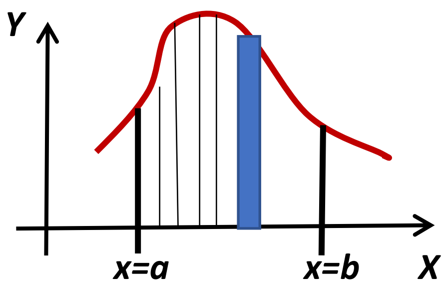
APLICACIONES DE LA INTEGRAL. CÁLCULO DE AREAS

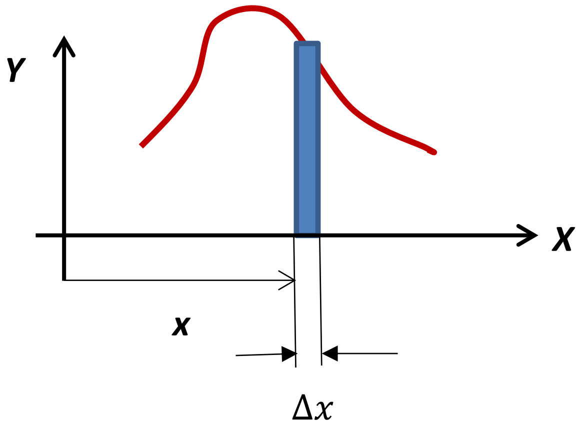
No es nuestra intención dar demostraciones rigurosas que, por otra parte, están en muchos libros y mejor, sino hacer entender los mecanismos e ideas esenciales que nos permiten aplicar las integrales a un sinfín de problemas. Empezamos por la idea fundamental, **el cálculo del área formada por una función y el eje OX:**



Imaginemos que queremos conocer cuánto vale el área rayada. Como hemos dicho, nuestra explicación no va a ser rigurosa, pero, por el contrario, esperamos que sea capaz de clarificar la idea fundamental de la integral: **es una suma de muchísimos sumandos muy pequeños.**



Lo que vamos a hacer es dividir el segmento del eje ***X*** que va desde ***x=a*** hasta x***=b*** en trocitos "muy pequeños" que formarán con la curva casi rectángulos muy finos (decimos casi porque el techo pertenece a la curva y no es recto. El error que cometeremos con ello es muy pequeño, tiende a cero, porque la base de los rectángulos, insistimos, es muy pequeña). Después, sumaremos todas esas pequeñas áreas para calcular el área total, esa operación suma será la integral.



Estando en un valor de x cualquiera, si nos vamos un poquito a la derecha una longitud Δx, el área entre la curva y el eje ***X*** habrá aumentado en un rectángulo muy fino cuya base es Δx y cuya altura es $f(x)$. Diremos entonces:

$$\Delta A = f(x)\Delta x$$

Si se cumplen ciertas condiciones, para nosotros siempre, cuando los **incrementos tienden a cero** (que es lo que queremos, no olvidar que la base del rectángulo ha de ser muy pequeña para que el error sea despreciable) los **llamamos *diferenciales*** y la expresión anterior queda:

$$\boldsymbol{dA = f(x)dx}$$

Pues bien, cuando tenemos el diferencial (el trocito) de una función (de una cierta variable x) en nuestro caso la función área, y queremos sumar todos esos trocitos diferenciales ESA SUMA ES LA INTEGRAL de la expresión anterior:

$$\boxed{\boldsymbol{A = \int_{x=a}^{x=b} f(x)dx}}$$

En donde los límites de integración significan que queremos que nos sume todos los trocitos diferenciales entre que ***"x"*** vale ***"a"*** hasta que ***"x"*** vale ***"b".*** A la integral de la derecha se le llama integral definida entre ***x=a y x=b*** y se calcula de la siguiente manera:

Hacemos la integral indefinida aplicando los métodos de integración:

$$\int \boldsymbol{f(x)dx = I(x)} \rightarrow$$

Entonces, la integral definida es

$$\rightarrow \int_{x=a}^{x=b} \boldsymbol{f(x)dx = I(b) - I(a)}$$

Propiedades principales de la integral definida:

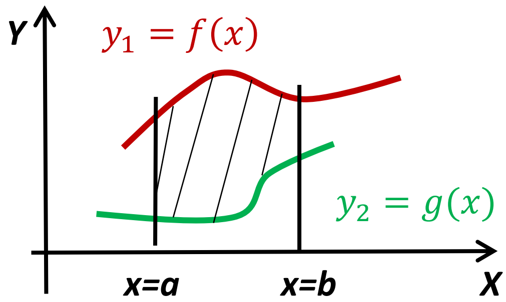
$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

No olvidar que cuando tenemos la expresión diferencial (trocito) de una función, la integral nos suma todos los trocitos. Este método es muy importante porque muchas veces las magnitudes de cualquier tipo no son constantes (en nuestro caso, la altura de los rectangulitos) y lo que hacemos es coger un trocito muy pequeño en donde la magnitud variable tenga un valor constante en ese trocito y después sumamos todos esos trocitos por medio de una integral**.** (Ver problemas de campo eléctrico en la página de física).

victor loza
ACADEMIA ONLINE

CALCULAR EL ÁREA ENTRE DOS CURVAS $y_1 = f(x), y_2 = g(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ (ley general a utilizar)



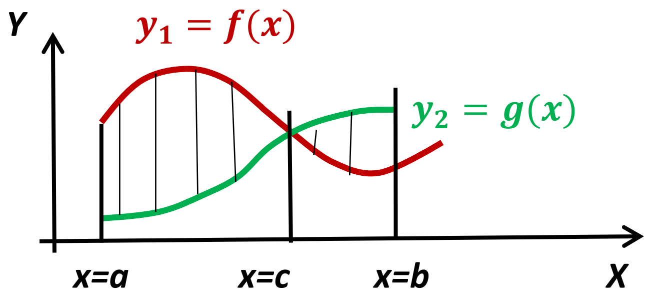
$$A = \int_{x=a}^{x=b} (F_{arriba} - F_{abajo})dx$$

ESTA FÓRMULA ES GENERAL, AUNQUE UNA DE LAS CURVAS SEA EL EJE X (ver ejemplo *1* y siguientes). POR LO TANTO, DIBUJAR SIEMPRE UN ESBOZO DE LAS GRÁFICAS PARA SABER CUÁL ESTÁ POR ENCIMA Y CUÁL POR DEBAJO.

En nuestro caso dibujado:

$$A = \int_{x=a}^{x=b} (f(x) - g(x))dx$$

Si hay distintas partes, cada una de ellas con su función "techo" y su función "suelo", aplicamos la fórmula anterior a cada una de ellas, como en la figura siguiente:



Queremos calcular el área formada por las dos funciones, sus curvas, $y_1 = f(x)$ en rojo y $y_2 = g(x)$ en verde, entre ***x=a* *y* *x=b***. Lo primero que hacemos es, como se ha dicho, un esbozo de las gráficas en el intervalo que nos interesa, entre ***x=a y x=b***. Si ocurre como en la figura, vemos claramente que la función que va por encima, el "techo", no es siempre la misma. Calcularemos el punto de intersección ***x=c*** y aplicaremos la **ley general de área formada entre dos curvas** a cada una de las partes en donde la función de "encima" y la función de "debajo" son las mismas, quedándonos:

$$A_{rayada} = \int_{x=a}^{x=c} [f(x) - g(x)]dx + \int_{x=c}^{x=b} [g(x) - f(x)]dx$$

Insistimos en que, **en la ley general de área formada por dos curvas,** el eje X $(y = 0)$ es una función igual que las demás (como no podría ser de otra manera). Pensamos que las fórmulas anteriores no hay que aprendérselas de memoria, sino entender la idea y aplicarla a los distintos casos que nos vayan saliendo.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo

Área entre la curva $y = x^2 - 5x + 6$, el eje X y las rectas x=1 y x=5

DIBUJO:

$$y = x^2 - 5x + 6$$

Esta función es una parábola, con los cortes con los ejes es suficiente para dibujarla:

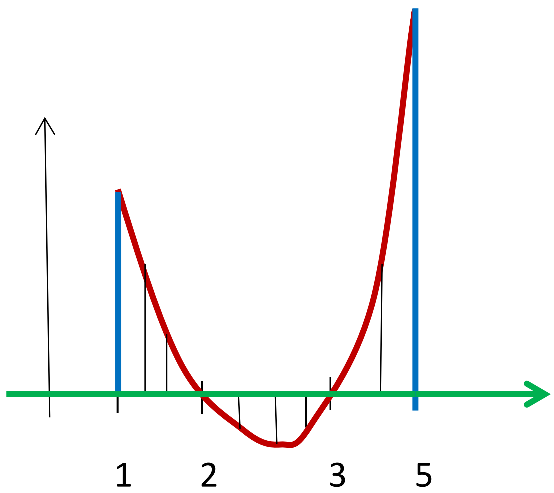
Cortes eje X:

$$y = 0 \to x^2 - 5x + 6 = 0 \to \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Corte eje Y:

$$x = 0 \to y = 6$$

Quedándonos:



Marcamos claramente las curvas sobre las que nos pedido el área, aquí se hecho con los tres colores.

El área pedida es la rayada y, como observamos, **hay tres trozos a distinguir formados por las líneas cuya área queremos calcular**, según esté una curva u otra por encima de la otra.

El primero va desde x=1 hasta x=2 en donde la función por encima, el "techo", es la parábola y la función por debajo, el "suelo", es el eje ***X (y=0).***

El segundo va desde x=2 hasta x=3 donde el techo es el eje ***X*** y el suelo la parábola.

El tercero y último va desde x=3 hasta x=5 donde la función por encima vuelve a ser la parábola y la función por debajo el eje ***X***. Por lo tanto, aplicando la ley general de áreas entre dos curvas, nos queda:

$$A_{rayada} = \int_{x=1}^{x=2} [(x^2 - 5x + 6) - (0)]dx + \int_{x=2}^{x=3} [(0) - (x^2 - 5x + 6)]dx + \int_{x=3}^{x=5} [(x^2 - 5x + 6) - (0)]dx$$

(El "cero" que aparece en ellas, recordamos, es la ecuación del eje ***X, y=0***)

Como ejemplo, hacemos sólo la primera, las demás igual.

$$\int_{x=1}^{x=2} [(x^2 - 5x + 6) - (0)]dx = \left[\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 6x\right]_{x=1}^{x=2} =$$

$$\left[\left(\frac{2^3}{3} - 5\frac{2^2}{2} + 6 \cdot 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 5\frac{1^2}{2} + 6 \cdot 1\right)\right] = \frac{5}{6}\,u^2$$

Unidades cuadradas.