PROBLEMAS DINÁMICA DE ROTACIÓN DE LA PARTÍCULA

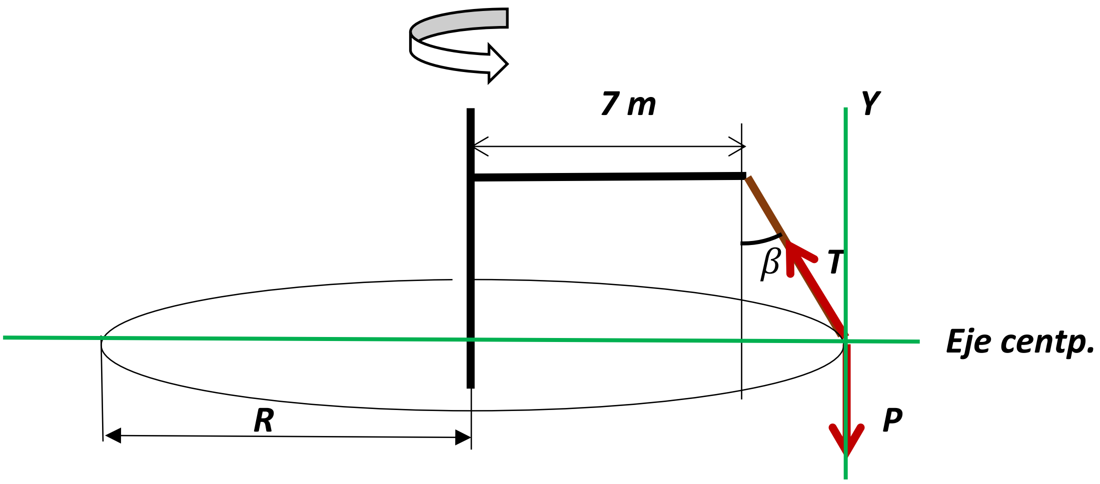
En este capítulo dedicado a problemas vamos a seguir practicando las leyes de Newton aplicadas a la a la rotación. **Aconsejamos estudiar la teoría y los problemas de primero de bachiller, pues empezamos a partir de ahí** para no duplicar documentos.

Ejemplo 1

Un columpio de feria está atado a una cuerda de 3m de longitud que a su vez está agarrada a un vástago rígido y horizontal de 7m de longitud que gira a razón de 3 r.p.m. El columpio de 100 Kg gira entonces en un plano horizontal como indica la figura formando la cuerda un ángulo con la vertical un ángulo β. Calcular β.

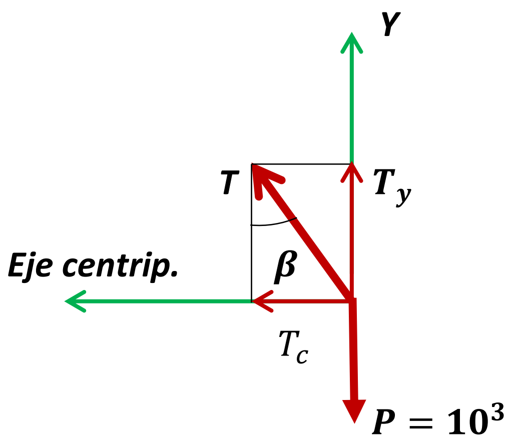
$$\omega = 3r.p.m. = 3\frac{1\,rev}{1\,mn} = 3\frac{2\pi\,Rd}{60\,s} = \frac{\pi}{10}Rd/_s$$

Diagrama de fuerzas:



El cuerpo sólo tiene a la cuerda como contacto "físico" con el exterior, por lo tanto, sobre él actúa la tensión ***T.*** El peso, ***P,*** es la otra fuerza. En marrón se ha dibujado la cuerda de ***3 m*** de longitud.

Descomposición sobre eje centrípeto y, como nuestra rotación es en un plano horizontal, **también sobre el eje Y vertical:**



Como vemos, es la tensión la fuerza que no va sobre los ejes y la que hay que descomponer:

$$T_y = T cos\beta$$

$$T_c = T sen\beta$$

Aplicamos las leyes a los ejes:

$$\sum \boldsymbol{F_y} = \mathbf{0} \rightarrow T cos\beta = P$$

$$\rightarrow \boldsymbol{T cos\beta} = \mathbf{10^3} \;\; (1)$$

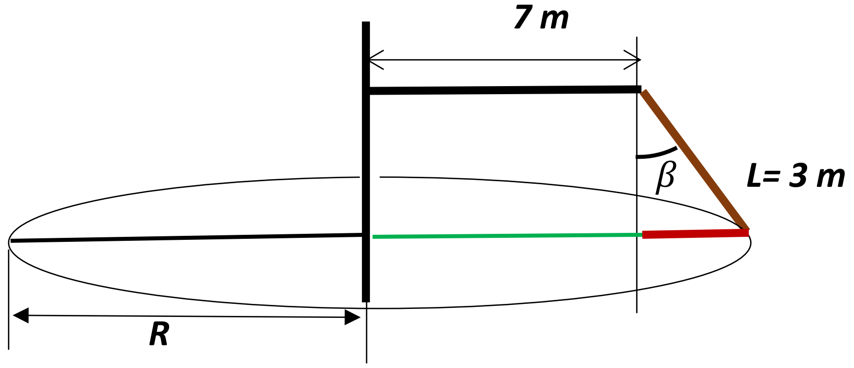
$$\sum F_c = ma_c \rightarrow T_c = m\omega^2 R \rightarrow |R = 7 + 3sen\beta| \rightarrow$$

$$T sen\beta = 100(\frac{\pi}{10})^2 \cdot (7 + 3sen\beta)$$

$$\rightarrow \boldsymbol{T sen\beta} = \boldsymbol{\pi^2}(\mathbf{7} + \boldsymbol{3 sen\beta})(2)$$

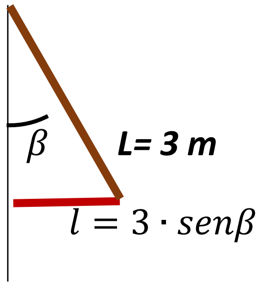
Donde el radio de giro, viendo la figura, se calcula según:

.



El radio es la suma de las longitudes verde y roja. La verde es dato, ***7 m,*** y la roja se calcula en el triángulo de la figura siguiente. La hipotenusa, en marrón, es la longitud de la cuerda, otro dato, ***3 m.***

. .



Siendo entonces el radio de giro:

$$R = 7 + l = \mathbf{7 + 3sen\boldsymbol{\beta}}$$

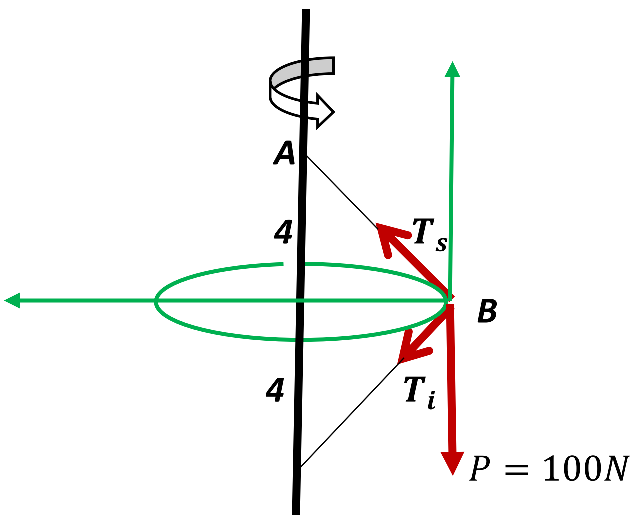
Las ecuaciones ***(1) y (2)*** forman un sistema de ecuaciones en $\boldsymbol{T\ y\ \beta}$**,** cuya resolución es más larga de lo que conviene a este estudio físico (La manera que siempre funciona, aunque algo "pedestre", es hacer aparecer sólo senos o cosenos utilizando la identidad $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ fundamental de la trigonometría.

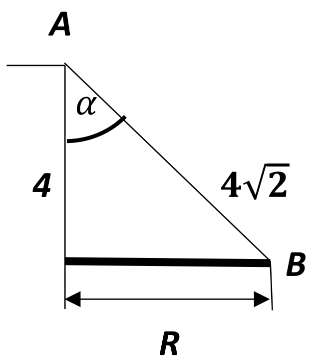
Ejemplo 2:

Una masa de 10 kg gira en un plano horizontal agarrada a dos cuerdas de $4\sqrt{2}$ m, unidas a un vástago (eje) de 8 metros de longitud, como indica la figura. El sistema gira con velocidad angular de 40 r.p.m. Calcular las tensiones en ambas cuerdas.

$$\omega = 4r.p.m. = 40\frac{1\,rev}{1\,mn} = 40\frac{2\pi\,Rd}{60\,s} = \frac{4}{3}\pi\ {}^{Rd}/_{s}$$

Diagrama de fuerzas



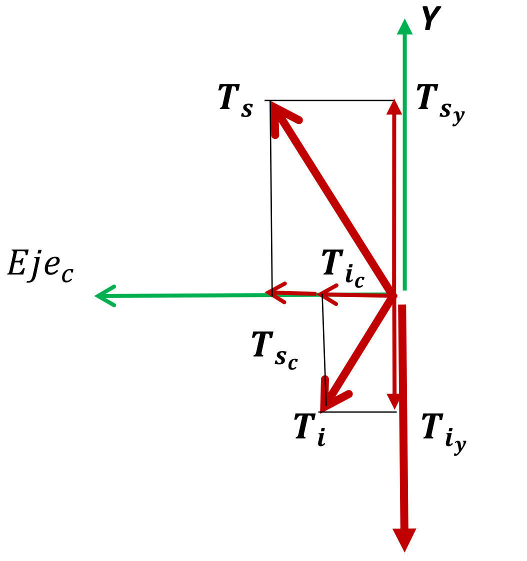


Antes de seguir calculemos el radio de giro y el ángulo α en el triángulo anterior, datos necesarios para los cálculos:

$$R^2 + 4^2 = (4\sqrt{2})^2 \rightarrow R^2 = 32 - 16 = 16 \rightarrow R = 4$$

Se trata por lo tanto de un triángulo isósceles y el ángulo α vale entonces ***45º***.

Descomposición sobre los ejes centrípeto e Y vertical (rotación en un plano horizontal)



Calculamos los valores de las componentes de las tensiones teniendo en cuenta que todos los ángulos que intervienen son de 45º:

$$T_s \rightarrow \begin{cases} T_{s_y} = T_s \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \left(sen45 = cos45 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ T_{s_c} = T_s \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$T_i \rightarrow \begin{cases} T_{i_y} = T_i \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ T_{i_c} = T_i \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Aplicamos las leyes a los ejes centrípeto y vertical:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow T_{s_y} = T_{i_y} + P \rightarrow \boldsymbol{T_s \frac{\sqrt{2}}{2} = T_i \frac{\sqrt{2}}{2} + 100}\ \mathbf{(1)}$$

$$\sum F_c = m\omega^2 R \rightarrow T_{s_c} + T_{i_c} = m\omega^2 R \rightarrow \boldsymbol{T_s \frac{\sqrt{2}}{2} + T_i \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 \cdot 4}\ \ \mathbf{(2)}$$

Y encontramos, para variar, dos ecuaciones con las dos incógnitas pedidas:

$$\boldsymbol{T_s = 566,98\ N}$$

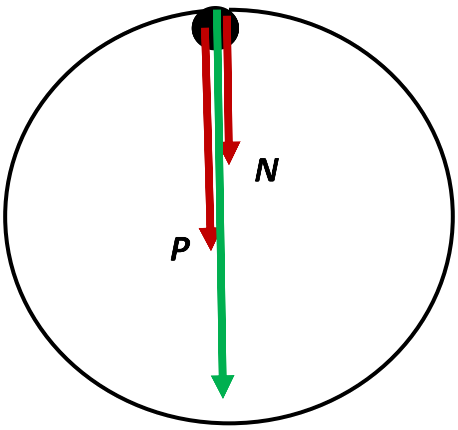
$$\boldsymbol{T_i = 425,56\ N}$$

Ejemplo 3

Una masa de 4Kg gira en una circunferencia vertical de radio 2 metros dentro de un rizo, un tubo, rígido como indica la figura. Si la velocidad con que lo hace es de 6 m/s calcular el valor de la normal en el punto más alto, en el medio y en el punto más bajo. ¿Hay alguna velocidad mínima por debajo de la cual la masa no llega al punto más alto?

En el punto más alto:

Diagrama de fuerzas:



Descomposición eje centrípeto: (la rotación no es en un plano horizontal, con el eje centrípeto va a ser suficiente para resolver)

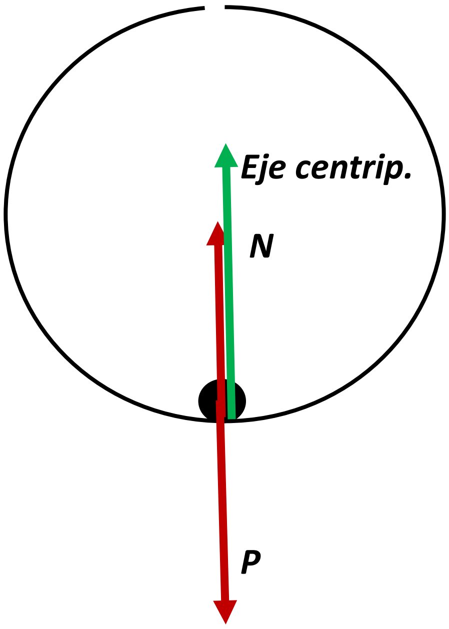
Las dos fuerzas, peso y normal, ya van sobre el eje centrípeto

Aplicación de las leyes:

$$\sum F_c = ma_c \rightarrow P + N = m\frac{v^2}{R} \rightarrow 40 + N = 4\frac{6^2}{2} \rightarrow \boldsymbol{N = 32\ N}$$

En el punto más bajo:

Diagrama de fuerzas:



Descomposición:

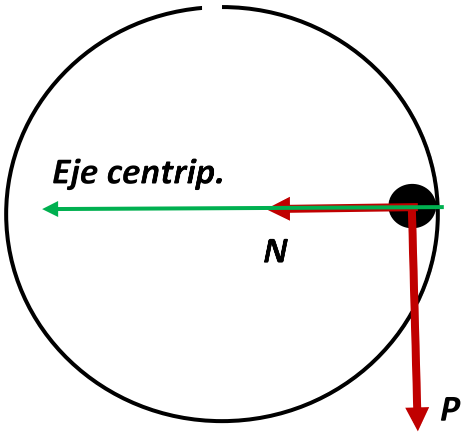
Ya están sobre el eje centrípeto.

Aplicación de las leyes:

$$\sum F_c = ma_c \rightarrow N - P = m\frac{v^2}{R} \rightarrow N - 40 = 4\frac{36}{2} \rightarrow \boldsymbol{N = 112\ N}$$

En el medio

Diagrama de fuerzas:



Descomposición eje centrípeto:

El peso no tiene componente sobre el eje centrípeto y la normal ya va sobre él.

Aplicación de las leyes

$$\sum F_c = ma_c \rightarrow N = m\frac{v^2}{R} \rightarrow \boldsymbol{N = 4\frac{36}{2} = 72\ N}$$

Hemos comentado que, para el cálculo de fuerzas, no suele ser necesario coger el eje tangencial, como acabamos de ver. Sin embargo, es un eje esencial teóricamente y, en este caso como en todos, nos podrían preguntar cuánto vale la aceleración tangencial y angular:

$$\sum F_\tau = ma_\tau \rightarrow P = ma_\tau \rightarrow 40 = 4a_\tau \rightarrow \boldsymbol{a_\tau = 10\ {}^{m}/_{s^2}}$$

$$a_\tau = \alpha R \rightarrow 10 = \alpha \cdot 2 \rightarrow \boldsymbol{\alpha = 5\ {}^{Rd}/_{s^2}}$$

La última pregunta se refiere a si hay alguna velocidad mínima para la cual la masa no llega al punto más alto. **En este tipo de preguntas hemos de pensar siempre en las restricciones que tienen que cumplir las fuerzas que nosotros hemos llamado de ligadura, en este caso la normal ($\boldsymbol{N \geq 0}$).** Como podemos pensar intuitivamente el punto más desfavorable para que se mantenga en el rizo es el punto de arriba:

$$P + N = m\frac{v^2}{R} \rightarrow \boldsymbol{N = m\frac{v^2}{R} - mg \geq 0} \rightarrow m\frac{v^2}{R} \geq mg \rightarrow \boldsymbol{v \geq \sqrt{Rg}}$$

Por lo tanto, para que no se despegue, la velocidad arriba ha de ser mayor que ese valor. En nuestro caso

$$v \geq \sqrt{20} \cong 4{,}47 \ {}^{m}/_{s}$$