# MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

En esta lección vamos a estudiar los movimientos que se producen en dos dimensiones, el móvil va a ir ocupando distintas posiciones tanto en el eje X como en el eje Y. Por lo tanto, no van a ser movimientos rectilíneos. Pero realmente, lo que tenemos que saber ya lo hemos estudiado en las dos lecciones anteriores. Nos vamos a basar en una ley fundamental que nos dice que podemos trabajar sobre cada eje independientemente del otro. Por ejemplo, si sobre uno de los ejes no hay aceleración, aplicaremos a ese eje las leyes que hemos visto del movimiento uniforme. Y lo mismo si hay aceleración constante, aplicaremos las leyes del movimiento uniformemente acelerado.

La posición va a tener entonces dos componentes, una horizontal y otra vertical. Por lo tanto, aunque podamos trabajar en cada eje por separado, hemos de entender que **la posición es un vector. Lo mismo ocurre con la velocidad y la aceleración.** Por ello, en los capítulos siguientes cuando hablemos de la velocidad nos referiremos al vector velocidad y lo mismo con la aceleración, hablaremos del vector aceleración.

También, y es la forma que preferimos aquí, se puede trabajar a la vez con los dos si utilizamos esa notación vectorial, dado que un vector tiene, en nuestros problemas, dos dimensiones, cada una para cada eje. Damos a continuación la ley vectorial y las dos leyes que se desprenden de cada eje. Advertimos que en nuestros problemas sólo aparecerán movimientos de aceleración constante, incluido el caso de que valga cero para los movimientos de velocidad constante:

**Ley fundamental vectorial para todos los movimientos de aceleración constante:**

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

Estas leyes vectoriales son equivalentes a las siguientes, una por cada eje

$$\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = x_0 + (v_0)_x \cdot t + \frac{1}{2} a_x \cdot t^2}; \quad \boldsymbol{v_x(t) = (v_0)_x + a_x \cdot t} \\ \boldsymbol{y(t) = y_0 + (v_0)_y \cdot t + \frac{1}{2} a_y \cdot t^2}; \quad \boldsymbol{v_y(t) = (v_0)_y + a_y \cdot t} \end{cases}$$

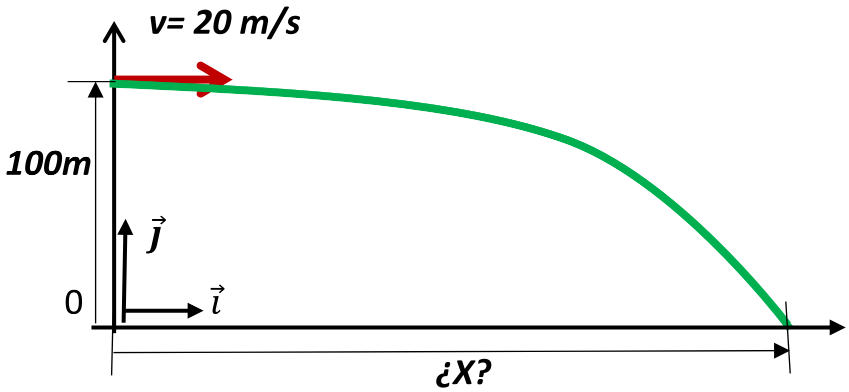
Los problemas que nos van a poner en este nivel se referirán casi todos, por no decir todos, al movimiento en caída "libre" de un móvil sobre las cercanías de la superficie terrestre. En ese caso, como ya se ha comentado en la lección anterior, la aceleración es vertical y hacia abajo, de módulo ***9.8*** pero que, en nuestros problemas, por comodidad y porque no supone ningún "riesgo" para el entendimiento, cogeremos como ***10***. Por lo tanto, la aceleración sobre el eje X horizontal será cero, transformándose las fórmulas anteriores para ese eje en las fórmulas del movimiento de velocidad constante

Veamos un ejemplo sencillo que, evidentemente, habrá que complementar con los problemas resueltos.

***Ejemplo***

***Desde un ala delta, a una altura de 100 metros, que se mueve con una velocidad horizontal de 20 m/s se deja caer una piedra. Calcular la distancia que recorre en horizontal hasta llegar al suelo, la velocidad con la que llega y la ecuación de la trayectoria.***

Como siempre, un dibujo ayuda a enfocar el problema. Vamos a plantear el problema en una primera forma de la manera vectorial. Antes de resolver, también plantearemos el problema con las expresiones para cada uno de los ejes, X e Y. Cada cuál elegirá la que más le guste o mejor entienda.




Como en los problemas de las lecciones anteriores, es fundamental marcar un sistema cartesiano de referencia, que es preciso definir desde el principio. En nuestro ejemplo el origen es el punto ***O*** de la figura y las **direcciones $\vec{\imath}$ y $\vec{\jmath}$ las tradicionales, horizontal hacia la derecha y vertical hacia arriba respectivamente, tal como se marca en la figura.** Una vez establecido el sistema de referencia**, el segundo paso es calcular los vectores aceleración, velocidad inicial y posición inicial que son los tres parámetros que aparecen en la fórmula fundamental.**

Como se ha dicho, todos los movimientos en caída libres (la única fuerza que actúa es la gravedad) tienen una aceleración constante vertical y hacia abajo de módulo 10 m/s aprox. Por lo tanto, ya tenemos el vector aceleración:

$$\vec{a} = -10j\ m/s$$

Nos falta calcular el vector velocidad inicial y el vector posición inicial, veamos:

La velocidad inicial es horizontal y de módulo ***20 m/s***. Por lo tanto

$$\vec{v}_0 = 20\vec{\imath} \ \textbf{(figura)}$$

**por ser horizontal hacia la derecha (figura)**

La posición inicial de la piedra cuando se lanza para nuestro sistema de referencia es claramente

$$\vec{r}_0 = 100\vec{\jmath} \ \textbf{(figura)}$$

Teniendo ya los tres vectores que definen **cualquier movimiento de aceleración constante utilizamos la ley** $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$**.**

Sustituyendo:

$$\vec{r} = 100\vec{\jmath} + 20\vec{\imath}\,t + \frac{1}{2}(\overrightarrow{-10\jmath})\,t^2$$

Y agrupando los términos en $\vec{\imath}\ y\ en\ \vec{\jmath}$ nos queda:

$$\vec{r} = 20t\vec{\imath} + (100 - \frac{1}{2}10t^2)\vec{\jmath}$$

Y es de aquí donde podemos separar en las dos componentes, la vertical "y" y la horizontal "x", o también aplicando las fórmulas a cada uno de los ejes: sobre el eje X un movimiento de velocidad constante y sobre el eje Y un movimiento de aceleración constante. De las dos maneras, de la ecuación vectorial o de la aplicación de las fórmulas a cada uno de los ejes, llegamos a las mismas expresiones:

$$\begin{cases} x = |x = x_0 + (v_0)_x \cdot t| = 0 + 20t \\ y = \left|y = y_0 + (v_0)_y \cdot t + \frac{1}{2}a_y \cdot t^2\right| = 100 - 5t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = 20 \\ v_y = |v_y = (v_0)_y + a_y \cdot t| \rightarrow v_y = -5 \cdot 2t = -10t \end{cases}$$

Donde "x" es la componente horizontal del vector de posición e "y" la componente vertical del mismo vector. Las componentes de la velocidad horizontal y vertical se calculan por las fórmulas para cada tipo de movimiento o derivando las funciones "x" e "y" respecto de la variable tiempo. Sino sabemos derivar todavía, aplicamos las fórmulas de las lecciones anteriores para los dos tipos de movimientos, el de velocidad constante y el de aceleración constante.

De las ecuaciones en "x" e "y" podemos calcular la ecuación de la trayectoria. De hecho, esas dos expresiones en donde las variables "x" e "y" dependen del tiempo se denominan ecuaciones paramétricas de la trayectoria. Si despejamos el parámetro en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$\begin{cases} x = 20t \rightarrow t = \dfrac{x}{20} \\ y = 100 - 5t^2 \rightarrow \left| t = \dfrac{x}{20} \right| \rightarrow \boldsymbol{y = 100 - 5\left(\dfrac{x}{20}\right)^2} \end{cases}$$

La última ecuación remarcada representa la ecuación cartesiana de la trayectoria. Debemos de saber que, por estar la "x" al cuadrado, esa función representa a una parábola. En todos los movimientos de este tipo la trayectoria es una parábola, de ahí que se llamen a estos problemas "de tiro parabólico".

Una vez que tenemos las ecuaciones de la posición y de la velocidad, es cuando podemos responder a las preguntas que nos hagan. Veamos entonces cómo se calcula el punto de impacto en el suelo y la velocidad en ese momento.

**Regla general: cuando nos pregunten por una posición, lo primero que hemos de hacer es calcular el tiempo en que ocurre.** Esto no suele ser difícil. En nuestro caso, de la posición del suelo no sabemos la distancia horizontal pero sí la altura, la "y", que para nuestro sistema de coordenadas es claramente cero, por lo tanto:

$$y = 100 - 5t^2 = 0 \rightarrow t = \sqrt{\frac{100}{5}} = \sqrt{20}\, s$$

Sustituyendo en x:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = 20t = \boldsymbol{20\sqrt{20}}\, m \\ y = 0\, m \end{cases}$$

Para calcular la velocidad en ese momento sustituimos el valor de t en las expresiones de la velocidad:

$$\begin{cases} \boldsymbol{v_x = 20\, m/s} \\ \boldsymbol{v_y = -10\sqrt{20}\, m/s} \end{cases}$$

Sabiendo las dos componentes de la velocidad, podemos calcular su módulo. El módulo de la velocidad se suele llamar rapidez o celeridad.

$$\boldsymbol{v} = |\vec{v}| = \sqrt{20^2 + \left(-10\sqrt{20}\right)^2} = \sqrt{2400} = \boldsymbol{20\sqrt{6}\ {}^{m}/_{s}}$$